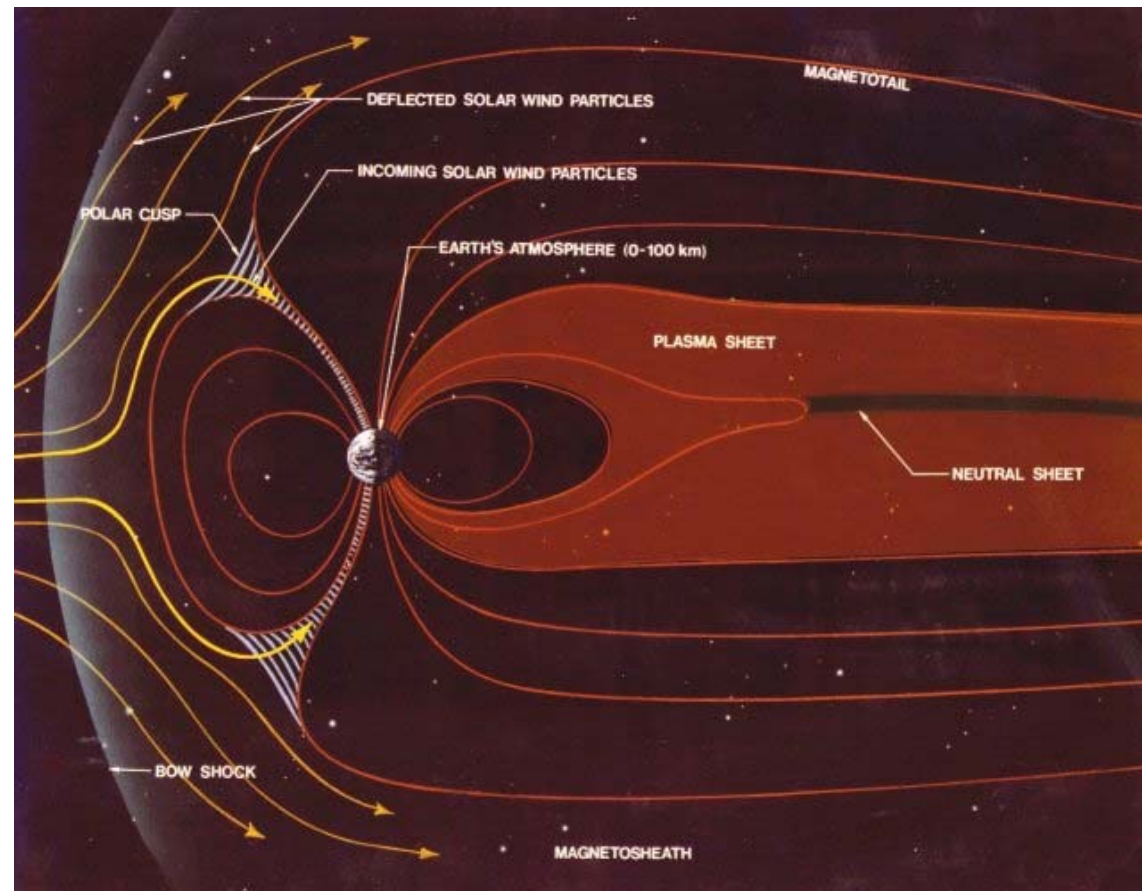


4) Magnetischer Einschluss von Plasmen

Mit externen elektrischen Feldern gibt es aufgrund der Abschirmung im Plasma kaum Kontrollmöglichkeiten. Dies wird jedoch mit Magnetfeldern ermöglicht, da das Magnetfeld geladene Teilchen an sich bindet. Dies bezeichnet man als **Plasmaeinschluss**. Dies ist vor allem in der Magnetfusion (Tokamak, Stellarator) von fundamentalem Interesse.

Beispiel in der Natur: Führung von hochenergetischen Teilchen der kosmischen Strahlung im Erdmagnetfeld zu den Polen → Entstehung der Polarlichter.



Zunächst betrachten wir die Bewegung von Einzelteilchen im Magnetfeld. Berücksichtigen wir kollektive Effekte, dann müssen diese durch die **Magnetohydrodynamik (MHD)** beschrieben werden.

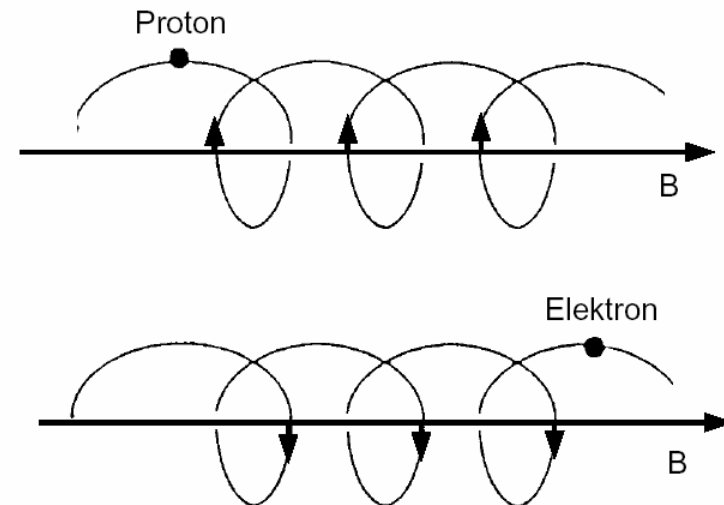
Lorentzkraft:
$$m \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Wegen $\vec{F}_L \perp \vec{B}$ ist $m \cdot \dot{v}_{\parallel} = 0$, d.h. das Magnetfeld hat keinen Einfluss auf die Bewegung parallel zum Magnetfeld. Außerdem ändert sich nur die Richtung von der Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld, die kinetische Energie des Teilchens ändert sich dabei nicht (Kreisbahn).

$$m \cdot \frac{v_{\perp}^2}{r} = m \omega_c^2 r = q \cdot v_{\perp} \cdot B = q \omega_c r \cdot B$$

→
$$\omega_c = \frac{q}{m} B$$
 Zyklotronfrequenz (4.1)

$$\omega_{ce} [Hz] = 1.76 \cdot 10^{11} \cdot B [T] \quad , \quad \omega_{ci} = \frac{m_e}{m_i} \omega_{ce} \quad ,$$



Radius auf Orbit: $r = \frac{m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B}$

- Gyrationbewegung der Elektronen → Plasmadiagnostik
- Einstrahlen einer elektromagnetischen Welle mit $\omega = \omega_{ce}$ → Plasma heizen

Mit $\frac{1}{2} m \cdot v_{\perp}^2 = kT$ (2 Freiheitsgrade senkrecht zu B) folgt der **Lamorradius** r_L zu

$$r_L = \frac{m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B} = \frac{\sqrt{2mkT}}{qB} = 3.4 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\sqrt{T_e [eV]}}{B [T]} [m] \quad (4.2)$$

Beispiel: $T_e = 1 \text{ eV}$, $B = 1 \text{ T}$ → $r_L = 3.4 \text{ } \mu\text{m}$

Was ist jedoch, wenn $m \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{F} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

mit einer zusätzlichen Kraft F, welche auf die Teilchen wirkt

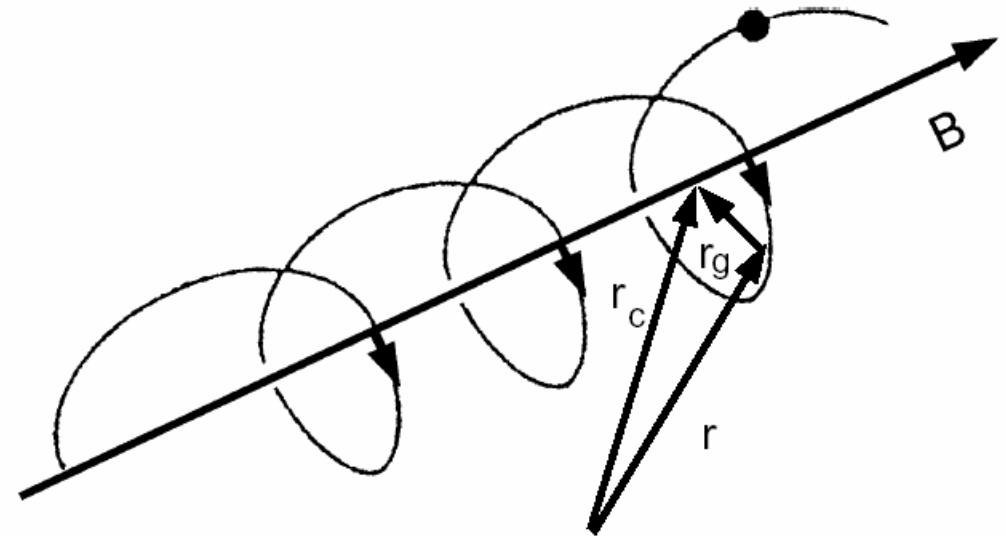
⇒ keine geschlossenen Kreisbahnen mehr

Für räumlich und zeitlich konstantes \vec{B} und \vec{F}

→ **guiding center-Ansatz**

Bewegung des Führungszentrums

$$\vec{r}_c = \vec{r} + \vec{r}_g, \quad \vec{r}_g = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{v \cdot B} = \frac{m}{q \cdot B^2} \vec{v} \times \vec{B}$$



Die Geschwindigkeit des Führungszentrums ist

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}_g = \vec{v} + \frac{m}{q \cdot B^2} \cdot \dot{\vec{v}} \times \vec{B} = \vec{v} + \frac{1}{q \cdot B^2} (\vec{F} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

mit $(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{v} \cdot \vec{B})\vec{B} - B^2\vec{v} = -B^2\vec{v}_\perp$ folgt für die Geschwindigkeit des Führungszentrums

$$\vec{v}_c = \vec{v}_\parallel + \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{q \cdot B^2} \quad \text{mit} \quad m\dot{\vec{v}}_\parallel = \vec{F}_\parallel \quad (4.3)$$

Der zweite Term ist die **Driftgeschwindigkeit**, die nicht beschleunigt und senkrecht zu \vec{B} und \vec{F}_\perp steht.

Beispiele: 1.) elektrisches Feld

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

→ E x B -Drift

$$\rightarrow \vec{v}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

Die Driftgeschwindigkeit ist ladungsunabhängig!

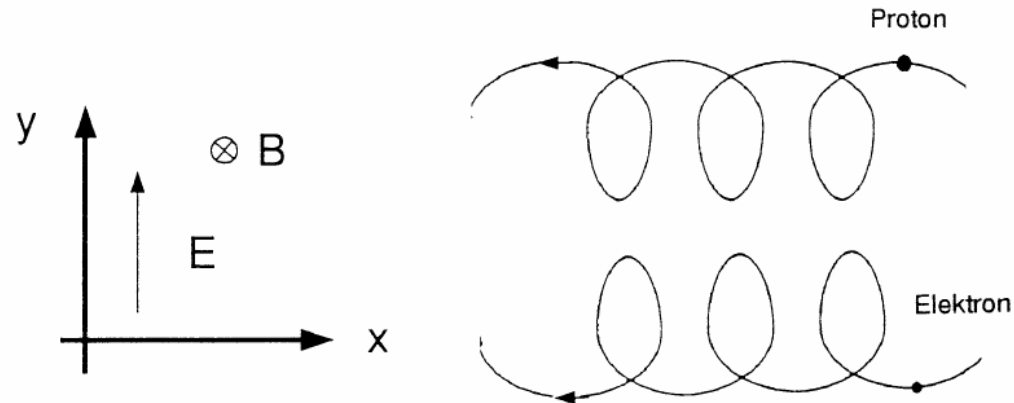


Abbildung 5.3: Veranschaulichung der $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Drift: Das E -Feld zeigt in y -Richtung, das B -Feld in die Zeichenebene hinein. Die Drift erfolgt also längs der x -Achse. Wiederum sind die Gyroradien nicht maßstäblich.

2.) Gravitationskraft $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ →
$$\vec{v}_D = \frac{m \cdot \vec{g} \times \vec{B}}{q \cdot B^2}$$

Das Teilchen gewinnt Energie in Richtung \vec{g}_{\parallel} . Die Drift ist ladungsabhängig und führt zur

Ladungstrennung mit dem Strom
$$\vec{j}_g = n_e e \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_e) = n_e e \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{e \cdot B^2} \left(\frac{m_i}{Z} + m_e \right)$$

Für Quellen ist diese Drift jedoch vernachlässigbar. Wichtiger sind Driften aufgrund von Gradienten.

3.) $\vec{\nabla} \mathbf{B}$ -Drift, wenn $\vec{B} = \vec{f}(x, t) \rightarrow$ Krümmungsdrift

Aufgrund von $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ bedingt ein Gradient in B eine Krümmung der Feldlinien. Dies bewirkt die

Zentrifugalkraft
$$\vec{F} = m \cdot \frac{|\vec{v}_{\parallel}|^2}{R_c} \cdot \hat{r}_c .$$

$$\vec{v}_D = \frac{m \cdot |\vec{v}_{\parallel}|^2}{R_c} \cdot \frac{\hat{r}_c \times \vec{B}}{q \cdot B^2}$$

Nun gilt:
$$\frac{\hat{r}_c}{R_c} = \frac{d\hat{T}}{ds} = -\frac{\vec{\nabla} B}{B}$$

Die Zentrifugalkraft zeigt in Richtung $-\vec{\nabla} B$ und damit

$$\vec{v}_D = -\frac{m \cdot |\vec{v}_{\parallel}|^2}{q \cdot B^3} \cdot \vec{\nabla} B \times \vec{B}$$

Beispiel: toroidales Magnetfeld

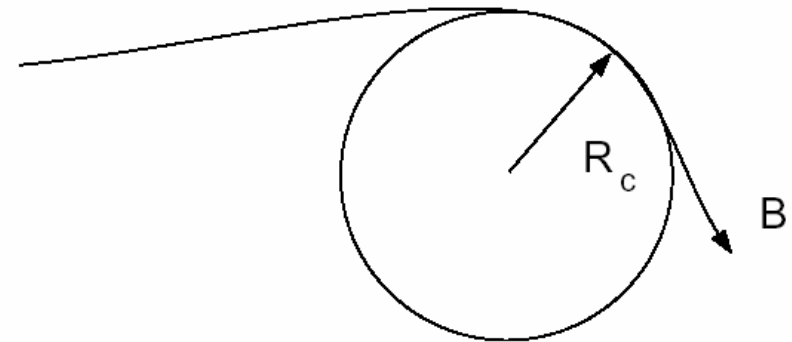


Abbildung 5.6: Zur Definition des lokalen Krümmungsradius R_c .

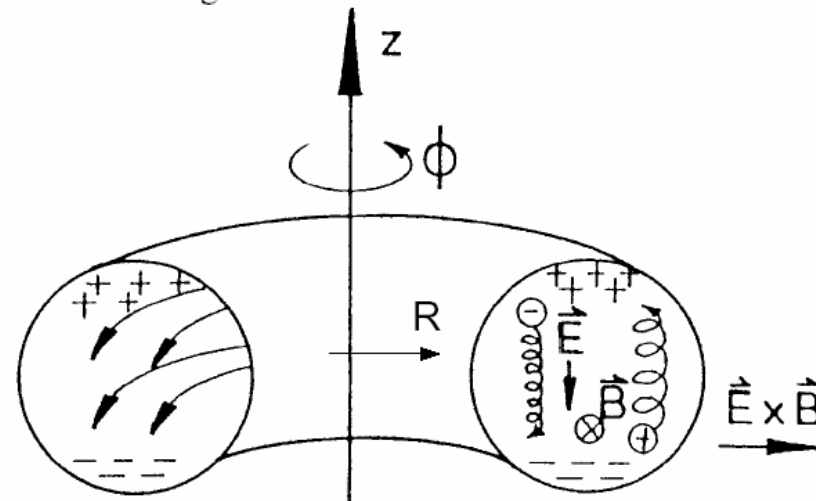


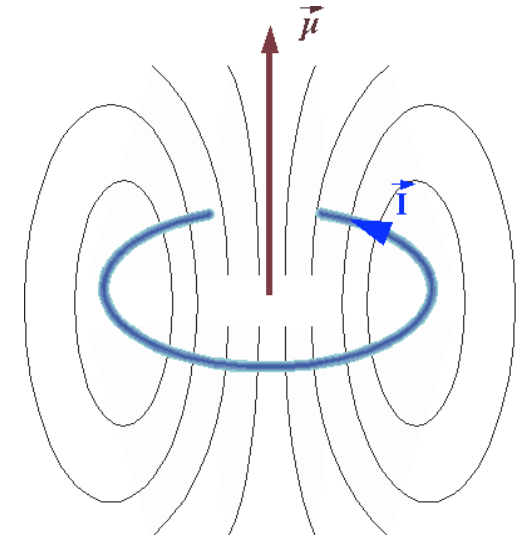
Abbildung 5.7: Teilchendriften im rein toroidalen Magnetfeld. Die Drift im inhomogenen Feld führt zur Ladungstrennung, das resultierende E-Feld transportiert das Plasma über die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift nach außen.

Adiabatische Invarianz des magnetischen Moments

Ein geladenes Teilchen bildet einen Kreisstrom im Magnetfeld

$$I = q \frac{v}{2\pi \cdot r} = q \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{magnetisches Dipolmoment:}$$

$$\vec{\mu}_m = I \cdot \int_F dF \cdot \vec{n}_F = I \cdot F \cdot \vec{n}_F = \frac{1}{2} q \omega_c \cdot r_L^2 \cdot \vec{n}_F = \frac{q^2}{2m} B \cdot r_L^2 \cdot \vec{n}_F$$



mit dem Lamorradius $r_L = \frac{v_{\perp} m}{B \cdot q}$ erhält man

$$\mu_m = \frac{q^2}{2m} B \cdot \left(\frac{v_{\perp} m}{B \cdot q} \right)^2 = \frac{m \cdot v_{\perp}^2}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B} \quad (4.4)$$

Wie ändert sich nun das magnetische Moment bei einer langsamen Drift des Führungszentrums?
Änderung des magnetischen Flusses durch die Orbitfläche! (Induktion)

$$\text{Mit der Gyrationperiode } \tau_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad \text{und} \quad \Delta W_{\perp} = q \cdot \frac{d\phi}{dt} = \pi \cdot q \cdot r_L^2 \cdot \frac{dB}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dW_{\perp}}{dt} \approx \frac{\Delta W_{\perp}}{\tau_c} = \frac{\pi \cdot q \cdot r_L^2}{\tau_c} \cdot \frac{dB}{dt} = \mu_m \frac{dB}{dt} \quad \text{wenn } \tau_c \text{ und } r_L \text{ eingesetzt werden.}$$

Andererseits ist

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mu_m B) = B \frac{d\mu_m}{dt} + \mu_m \frac{dB}{dt}$$

daher gilt:

$$\frac{d\mu_m}{dt} = 0 \quad , \quad \mu_m = \text{const.}$$

Das magnetische Moment bleibt bei einer langsamen Driftbewegung (langsam ggü. der Gyrationbewegung) erhalten.

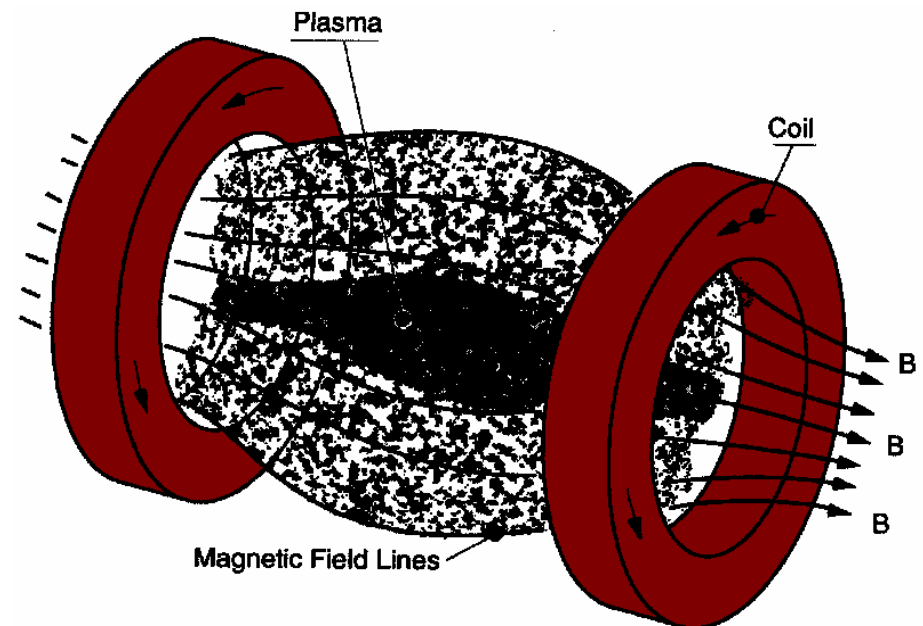
→ **adiabatische Invariante**

Beispiel: magnetischer Spiegel

Läuft ein Teilchen in ein Gebiet höherer Feldstärke so nimmt wegen der Konstanz des magnetischen Moments auch die kinetische Energie der Gyrationbewegung zu. Da die Gesamtenergie der Teilchen erhalten bleiben muss, nimmt die kinetische Energie in Richtung der Magnetfeldlinien ab. Um v_{\parallel} komplett abzubauen muss gelten:

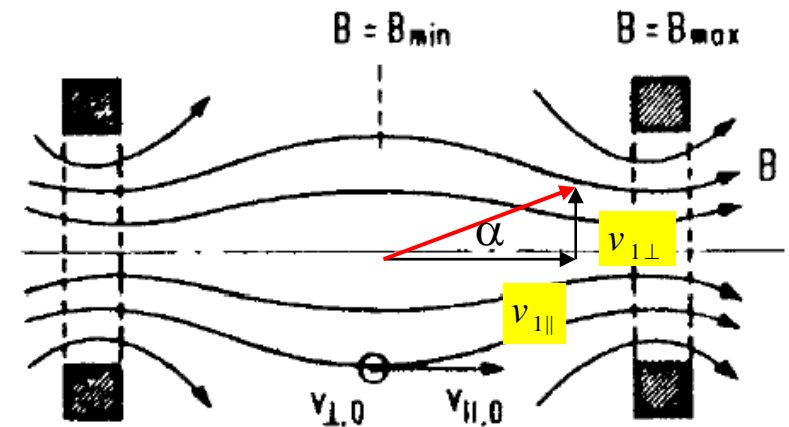
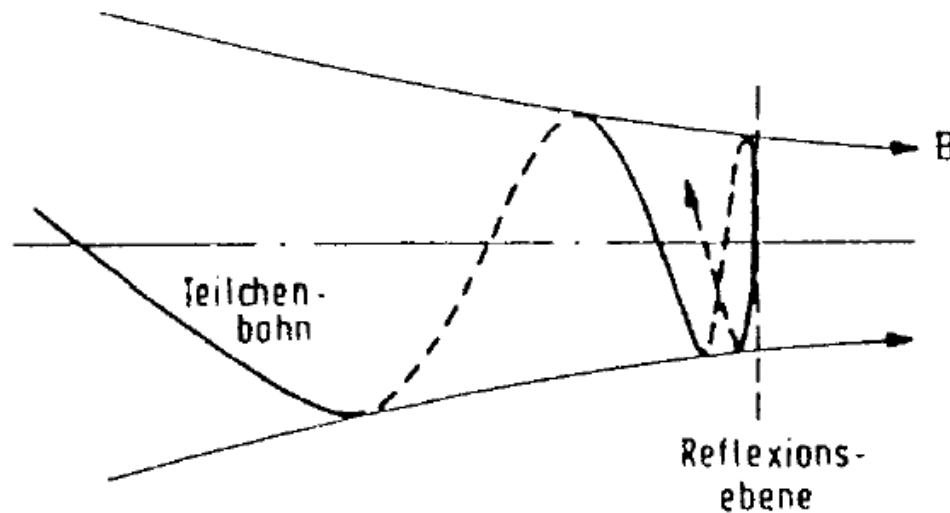
$$\mu_m (B_{\max} - B_1) = \Delta W_{\perp} = W_{2\perp} - W_{1\perp} > W_{\parallel,1}$$

Dabei startet das Teilchen an Position 1. Position 2 bezeichnet das Magnetfeldmaximum B_{\max} .



$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{W_{2\perp}}{W_{1\perp}} = 1 + \frac{\Delta W_{\perp}}{W_{1\perp}} \Rightarrow \frac{B_2}{B_1} - 1 = \frac{\Delta W_{\perp}}{W_{1\perp}} \geq \frac{W_{\parallel,1}}{W_{1\perp}} = \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \right)^2 = (\cot \alpha)^2$$

Man bezeichnet B_2/B_1 als das **Spiegelverhältnis**.



Der Verlustkegel ergibt sich aus

$$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{\frac{B_{\min}}{B_{\max}}}\right) \quad (4.5)$$

Die obige Gleichung zeigt, dass ein magnetischer Spiegel nicht perfekt reflektiert. Vor allem Teilchen mit keiner Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld gehen verloren (da deren Winkel bezüglich der Achse kleiner als α ist).

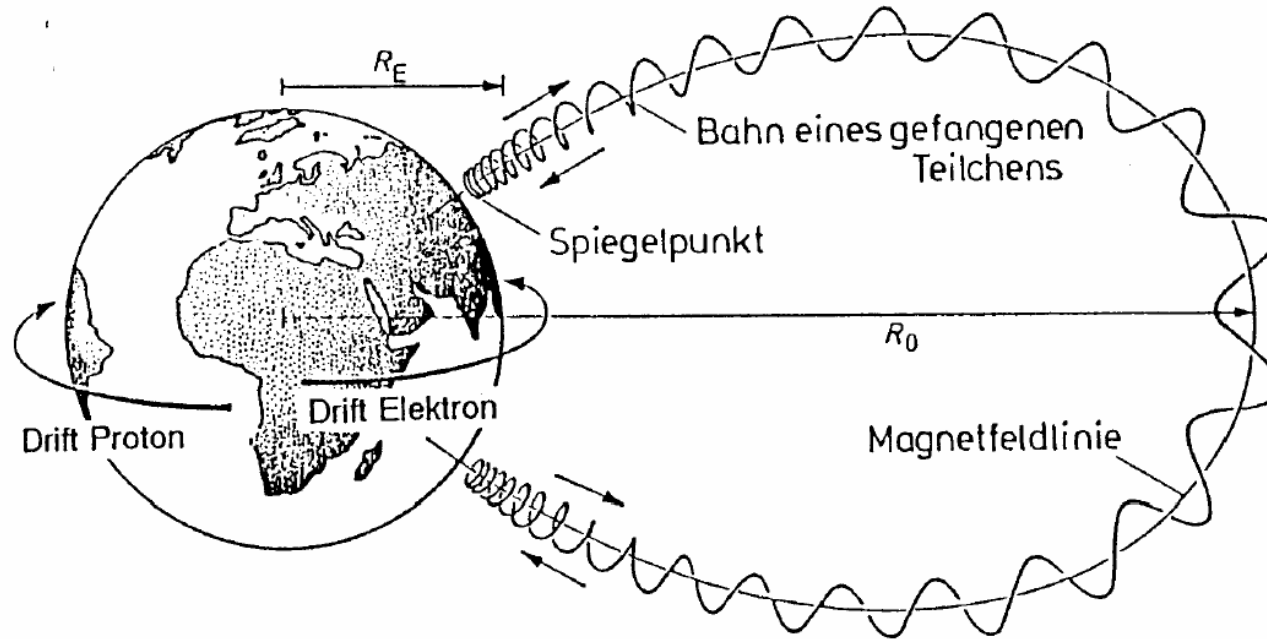


Abbildung 5.10: Teilchenbewegung im Erdmagnetfeld: An den Polen existiert ein magnetischer Spiegel, die Krümmungsdrift führt zu einem Strom in äquatorialer Richtung.

Magnetischer Einschluss findet sich im Ionenquellenbereich wie folgt wieder:

- Elektron Zyklotron Resonanz Ionenquelle (EZR) (resonantes Heizen von Plasmen mit HF)
- Einschuss von Ionen in eine Elektronenstrahl-Ionenquelle (EBIS)
- Multicusp-Ionenquellen
- Bewegung von Ionen in einer EBIS und einer Penningfalle