Ringbeschleuniger und Speicherringe
Übungsblatt 7
Lösungen

Prof. Dr. O. Kester, S. Geyer und Dr. P. Forck

Sommersemester 2016

1 Eigenfrequenzen einer zylindrischen Kavität

a) Für die $\mathbf{TM}_{mnp}$ Eigenfrequenzen einer zylindrischen Kavität mit dem Radius $R = 32$ cm und der Länge $l = 20$ cm gilt:

$$f_{mnp} = \frac{c}{2\pi} \cdot \sqrt{\left(\frac{\chi_{mn}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}$$

Es ist für $p = 0$:

$$m = 1: \quad f_{010} = 359 \text{ MHz} \qquad f_{110} = 571 \text{ MHz}$$

$$m = 2: \quad f_{020} = 823 \text{ MHz} \qquad f_{120} = 1046 \text{ MHz}$$

Es ist für $p = 1$:

$$m = 1: \quad f_{011} = 831 \text{ MHz} \qquad f_{111} = 942 \text{ MHz}$$

$$m = 2: \quad f_{021} = 1113 \text{ MHz} \qquad f_{121} = 1287 \text{ MHz}$$

b) Eine induktive Schleife koppelt an das azimutale Magnetfeld. Das magnetische Feld ist am Rand der Kavität am größten da $B_\phi = -E_0/c \cdot J'(\chi_{01}R/r) \cdot \sin\omega t$ für $r = R$ maximal ist.
c) Für die $\mathbf{TE}_{mnp}$ Eigenfrequenzen einer zylindrischen Kavität gilt:

$$f_{mnp} = \frac{c}{2\pi} \cdot \sqrt{\left(\frac{\chi'_{mn}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}$$

Es ist für $p = 1$:

$$m = 1: \quad f_{011} = 942 \text{ MHz} \qquad f_{111} = 798 \text{ MHz}$$

$$m = 2: \quad f_{021} = 1287 \text{ MHz} \qquad f_{121} = 1092 \text{ MHz}$$

d) Reine **TE**-moden haben auf der Strahlachse kein elektrisches Feld damit kann kann der Strahl dort nicht beschleunigt werden. Aber derartige Kavitäten können zu Ablenkung des Strahl benutzt werden, diese Ablenkung ist dann abhängig von der Ankunftszeit der Teilchen relativ zur Phase der Hochfrequenz.

2 Beschleunigung in einem Proton Synchrotron

a) Die kinetische Energie kann geschrieben werden als $E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot E_0$ mit der Ruheenergie des Protons von $E_0 = 938$ MeV. Damit ergibt sich $\gamma = 1 + \frac{Ekin}{E_0}$ und weiterhin für die Geschwindigkeit $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$. Die Umlaufzeit ist $t = \frac{C}{\beta c}$.
Die numerischen Werte bei Injektion sind: $\gamma_i = 1.107$ $\quad \beta_i = 42.8\%$ $\quad t_i = 781$ ns.
Die numerischen Werte bei Extraktion sind: $\gamma_f = 2.290$ $\quad \beta_f = 90.0\%$ $\quad t_f = 371$ ns.

b) Aus Zentripedalkraft ist gleich der Lorentzkraft in einem Dipol $\frac{mv^2}{\rho} = evB$ folgt die Beziehung $B = \frac{m_0c^2}{ec}\frac{\gamma\beta}{\rho}$. Damit ist die Induktion bei Injektion $B_i = 0.297$ T und bei Extraktion $B_f = 1.30$ T. Die magentfeld-rampe ist ungefähr $dB/dt \approx 1$ T/s. Die Beschleunigungsfrequenzen sind bei der 'Harmonischenzahl' 1 (Beschleunigung eines Bunches) $f_i = 1/t_i = 1.280$ MHz und $f_f = 1/t_f = 2.699$ MHz.
c) Der Mittelwert der Umlaufszeit ist $t_m = \frac{t_i+t_f}{2} = 576$ ns. Innerhalb von 1 s läuft der Strahl $N_{acc} = \frac{1s}{t_m} = 1.74 \cdot 10^6$ mal um. Insgesamt nimmt die kinetische Energie um $\Delta E = 3.9$ GeV zu, d.h. pro Umlauf ergibt sich ein Energiegewinn $E_{turn} = \frac{\Delta E}{N_{acc}} = 2.246$ keV. Das Sollteilchen hat einen Phasenwinkel von $\phi = 60^0$, die Spannung muss also $U_{acc} = \frac{E_{turn}}{e\sin\phi} = 2.593$ kV sein.
d) Die Leistung zur Beschleunigung ist $P_{in} = \frac{U_{acc}^2}{R_S} = 67$ kW.
e) Die Durchlaufzeit der Protonen durch den Spalt von ca. $g = 10$ cm ist maximal 0.8 ns und damit nur ein sehr geringer Bruchteil einer HF Periode von minimal $t_f = 371$ ns.