Ringbeschleuniger und Speicherringe
Übungsblatt 5
Lösungen

Prof. Dr. O. Kester, S. Geyer und Dr. P. Forck

Sommersemester 2016

1 Linsensysteme

Die Transfermatrix des Systems berechnet sich aus

$$R = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ -\frac{1}{f} & -\frac{l}{f} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & l - \frac{ld}{f} + d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{l}{f} + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & l - \frac{ld}{f} + d \\ \frac{1}{f} - \frac{d}{f^2} - \frac{1}{f} & -\frac{ld}{f^2} + \frac{d}{f} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{f^2} & 2\,l + d - \frac{l^2 d}{f^2} \\ -\frac{d}{f^2} & -\frac{ld}{f^2} + \frac{d}{f} + 1 \end{pmatrix}$$

Für eine Parallel-zu-Punkt-Abbildung muss gelten

$$0 = 1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{f^2} \quad \Longrightarrow \quad f^2 - d\,f - d\,l = 0$$

und damit

$$f_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + d\,l}\,.$$

2 Quadruplett

Die Transfermatrix für ein Dublett lässt sich mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1 und modifizierten Driftstrecken ausdrücken als

$$R_{\text{Dublett}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{2f^2} & l + d - \frac{l^2 d}{4f^2} \\ -\frac{d}{f^2} & -\frac{ld}{2f^2} + \frac{d}{f} + 1 \end{pmatrix}$$

Für ein Quadruplett gilt in x-Richtung also

$$R_{\text{Quadruplett}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{2f^2} & l + d - \frac{l^2 d}{4f^2} \\ -\frac{d}{f^2} & -\frac{ld}{2f^2} + \frac{d}{f} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{2f^2} & l + d - \frac{l^2 d}{4f^2} \\ -\frac{d}{f^2} & -\frac{ld}{2f^2} + \frac{d}{f} + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{2f^2}\right)^2 + \left(l + d - \frac{l^2 d}{4f^2}\right)\left(-\frac{d}{f^2}\right) & 2\left(l + d - \frac{l^2 d}{4f^2}\right)\left(1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{2f^2}\right) \\ -2\frac{d}{f^2}\left(1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{2f^2}\right) & \left(1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{2f^2}\right)^2 + \left(l + d - \frac{l^2 d}{4f^2}\right)\left(-\frac{d}{f^2}\right) \end{pmatrix}$$

Um die Bedingung für eine teleskopische Abbildung zu erfüllen, muss gelten $R_{12} = 0$ und $R_{21} = 0$ und demnach zum Einen

$$2\left(l + d - \frac{l^2 d}{4f^2}\right)\left(1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{2f^2}\right) = 0$$

und zum Anderen

$$-2\frac{d}{f^2}\left(1 - \frac{d}{f} - \frac{dl}{2f^2}\right) = 0\,.$$

Beide Bedingungen werden nur gleichzeitig erfüllt, wenn

$$f^2 - fd - \frac{dl}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d\,l}{2}}\,.$$

3 Dünne Linse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & -z_1 R_{11} + R_{12} \\ R_{21} & -z_1 R_{21} + R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} - z_2 R_{21} & -z_1 R_{11} + R_{12} - z_2\left(-z_1 R_{21} + R_{22}\right) \\ R_{21} & -z_1 R_{21} + R_{22} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die Hauptebenen:

$$z_2 = \frac{R_{11} - 1}{R_{21}} \qquad \text{und} \qquad z_1 = \frac{R_{22} - 1}{R_{21}}$$

Die Brennweite ergibt sich zu:

$$f = -\frac{1}{R_{21}}$$