Ringbeschleuniger und Speicherringe
Übungsblatt 3
Lösungen

Prof. Dr. O. Kester, S. Geyer und Dr. P. Forck

Sommersemester 2016

1 Hillsche DGL Darstellung

Für die DGL $u'' + f(s)u' + g(s)u = 0$ ermitteln wir die Ableitungen von $u = r \cdot exp(-\frac{1}{2}\int f(s)ds)$

$$u'(s) = r' \cdot exp(-\frac{1}{2}\int f(s)ds) - r \cdot exp(-\frac{1}{2}\int f(s)ds) \cdot \frac{1}{2}f(s)$$
$$u''(s) = r'' \cdot exp(-\frac{1}{2}\int f(s)ds) - r' \cdot exp(-\frac{1}{2}\int f(s)ds) \cdot \frac{1}{2}f(s)$$
$$-r' \cdot exp(-\frac{1}{2}\int f(s)ds) \cdot \frac{1}{2}f(s) + r \cdot exp(-\frac{1}{2}\int f(s)ds) \cdot \frac{1}{4}f^2(s)$$
$$-r \cdot exp(-\frac{1}{2}\int f(s)ds) \cdot \frac{1}{2}f'(s)$$

Mit $e(s) = exp(-\frac{1}{2}\int f(s)ds)$ und in die DGL oben eingesetzt folgt:

$$r'' \cdot e(s) - r' \cdot e(s) \cdot \frac{1}{2}f(s) - r' \cdot e(s) \cdot \frac{1}{2}f(s) + r \cdot e(s) \cdot \frac{1}{4}f^2(s)$$
$$-r \cdot e(s) \cdot \frac{1}{2}f'(s) + r' \cdot e(s)f(s) - r \cdot e(s) \cdot \frac{1}{2}f^2(s) + g(s)r \cdot e(s) = 0$$

Nach Ableitungen von r sortiert und mit e(s) ausgeklammert erhalten wir:

$$e(s) \cdot r'' + e(s) \cdot \left(-\frac{1}{2}f(s) - \frac{1}{2}f(s) + f(s)\right) r' + e(s) \cdot \left(\frac{1}{4}f^2(s) - \frac{1}{2}f'(s) - \frac{1}{2}f^2(s) + g(s)\right) r = 0$$

$$r'' + \left(-\frac{1}{2}f'(s) - \frac{1}{4}f^2(s) + g(s)\right) r = 0$$

Damit erhält man die Hillsche DGL mit $k(s) = g(s) - \frac{1}{2}f'(s) - \frac{1}{4}f^2(s)$.

2 Transformation von TWISS Parametern

Die Transfermatrix einer dünnen Linse lautet:

$$\begin{pmatrix} c & s \\ ć & ś \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

Die Transformation der TWISS Parameter erhält man durch:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & -2sc & s^2 \\ -cć & cś - sć & -sś \\ ć^2 & -2ść & ś^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 & 0 \\ \frac{1}{f^2} & \frac{2}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \beta_0$$

$$\alpha = \frac{\beta_0}{f} + \alpha_0$$

$$\gamma = \frac{\beta_0}{f^2} + \frac{2\alpha_0}{f} + \gamma_0$$

3 KV-Verteilung

Für den vereinfachten Fall einer aufrechten Ellipse gilt $\alpha = 0$ und damit $\gamma = \frac{1}{\beta}$. Damit ist $x_{max} = \sqrt{\epsilon_{xx'} \cdot \beta} = \sqrt{\frac{\epsilon_{xx'}}{\gamma}}$ und die Fläche der Emittanzellipse ist $A_{xx'} = \pi \cdot x_{max} \cdot x'_{max} = \pi \cdot \epsilon_{xx'}$. Damit erhalten wir:

$$\int\int \rho(x, x')dxdx' = \rho_0 \cdot A_{xx'}$$

Außerdem gilt

$$\gamma x^2 + \beta x'^2 = \epsilon_{xx'} \Leftrightarrow x' = \sqrt{\frac{1}{\beta}(\epsilon_{xx'} - \gamma x^2)}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int\int x^2 \cdot \rho(x, x')dxdx'}{\int\int \rho(x, x')dxdx'} = \frac{\rho_0 \cdot \int\int x^2 dxdx'}{\rho_0 \cdot A_{xx'}} = \frac{1}{A_{xx'}} \int_{-x_{max}}^{x_{max}} dx \cdot x^2 \int_{-\sqrt{\frac{1}{\beta}(\epsilon_{xx'} - \gamma x^2)}}^{\sqrt{\frac{1}{\beta}(\epsilon_{xx'} - \gamma x^2)}} dx'$$

$$= \frac{4}{\pi \epsilon_{xx'}} \int_0^{x_{max}} dx \cdot x^2 \sqrt{\frac{1}{\beta}(\epsilon_{xx'} - \gamma x^2)} = \frac{4\gamma}{\pi \epsilon_{xx'}} \int_0^{x_{max}} dx \cdot x^2 \sqrt{\frac{\epsilon_{xx'}}{\gamma} - x^2}$$

$$= \frac{4\gamma}{\pi \epsilon_{xx'}} \left[-\frac{x}{4}(\frac{\epsilon_{xx'}}{\gamma} - x^2)^{3/2} + \frac{\epsilon_{xx'}}{8\gamma} \left(x(\frac{\epsilon_{xx'}}{\gamma} - x^2)^{1/2} + \frac{\epsilon_{xx'}}{\gamma} arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{\epsilon_{xx'}}{\gamma}}} \right) \right]_0^{x_{max}}$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{\gamma}{\pi \epsilon_{xx'}} \left[\frac{\epsilon_{xx'}}{2\gamma} \frac{\epsilon_{xx'}}{\gamma} arcsin(1) \right] = \frac{\epsilon_{xx'}}{4\gamma} = \frac{x_{max}}{4}$$

Desgleichen gilt für

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{x'_{max}}{4}$$

Damit erhalten wir

$$\epsilon_{RMS} = \sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle x'^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{16} x_{max}^2 x'^2_{max}} = \frac{1}{4} \epsilon_{xx'}$$