Ringbeschleuniger und Speicherringe
Übungsblatt 2
Lösungen

Prof. Dr. O. Kester und Dr. P. Forck

Sommersemester 2016

1 Linsensysteme

$$\begin{pmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{f} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\frac{d}{f}-\frac{dl}{f^2} & 2l+d-\frac{dl^2}{f^2}\\ -\frac{d}{f^2} & -\frac{dl}{f^2}-\frac{d}{f}+1\end{pmatrix}$$

Für eine Punkt-zu-Punkt-Abbildung muss gelten :

$$m_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2l + d - \frac{dl^2}{f^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \sqrt{\frac{dl^2}{2l+d}}$$

2 Beweis

$$\frac{dp}{dv} = \frac{d}{dv}\sqrt{\frac{m_0^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_0^2c^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{m_0^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_0^2c^2}}\;\frac{-2v}{c^2}\left(-\frac{m_0^2c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2m_0^2c^2 - m_0^2c^2}}\;\frac{2vm_0^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2m_0^2c^2 - m_0^2c^2}}\,\gamma^4vm_0^2 = \frac{1}{p}\gamma^4vm_0^2$$

$$= \frac{1}{p}\gamma^2p^2\frac{1}{v} = \gamma^2p\frac{1}{v}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{dp}{p}$$

3 Invariante der Hillschen Gleichung

Für die Ableitung von I gilt:

$$\frac{dI}{ds} = 0 = \frac{xx'}{\rho^2} - \frac{x^2}{\rho^3}\rho' + (\rho x' - \rho' x)\left(\rho' x' + \rho x'' - \rho'' x - \rho' x'\right)$$

Da die Hillsche Differentialgleichung $x'' = -k^2 x$ eingesetzt ergibt:

$$0 = \frac{xx'}{\rho^2} - \frac{x^2}{\rho^3}\rho' - \rho x' k^2 x \rho - \rho x' \rho'' x + \rho' x^2 k^2 \rho + \rho' x^2 \rho''$$

$$= xx'\rho\left(\frac{1}{\rho^3} - \rho k^2 - \rho''\right) - x^2\rho'\left(\frac{1}{\rho^3} - \rho k^2 - \rho''\right) = \left(xx'\rho - x^2\rho'\right)\left(\frac{1}{\rho^3} - \rho k^2 - \rho''\right)$$

muss für alle x, x' gelten, daher folgt für den zweiten Faktor:

$$\rho'' + k^2\rho - \frac{1}{\rho^3} = 0$$

Physikalische Bedeutung von ρ: ρ ist identisch mit der β-Funktion (Twiss)
Warum ist $\rho(s) > 0 \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$ wenn $\rho(s_0) > 0$? - Quadrierte skalierte Enveloppe kann nicht negativ werden.
Anschauliche Bedeutung der Invarianten I: Einzelteilchenemittanz