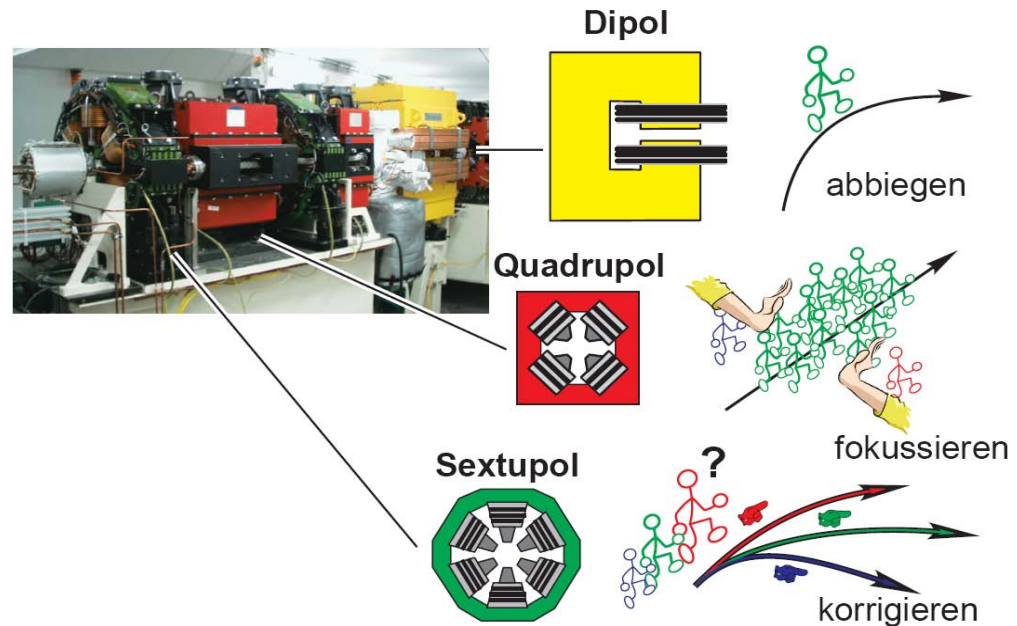


Lineare Strahloptik, Bewegungsgleichungen, Transformationsmatrizen

Überblick

- Herleitung Hillsche DGL
- Allgemeine Lösung der Hillschen DGL
- Matrizen-Schreibweise
- Lösung der Hillschen DGL mit Dispersion
- Beispiele für Transfermatrizen



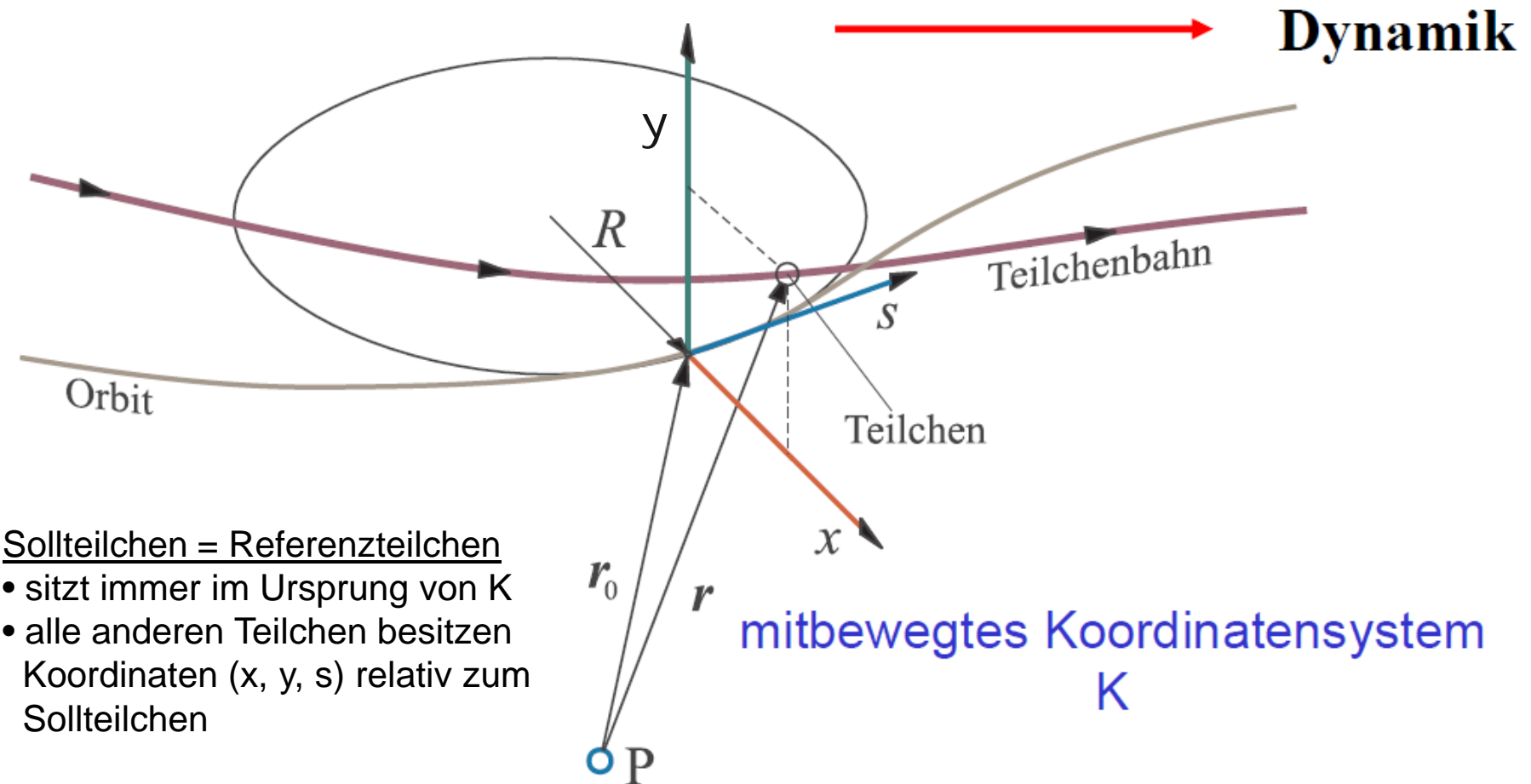
Wir betrachten die Trajektorie eines Teilchen durch strahloptische Elemente und stellen die Bewegungsgleichung dafür auf

Lineare Strahloptik

- lineare Bewegungsgleichungen
- Vernachlässigungen Terme höherer Ordnung

Was wir brauchen:

1. Beschreibung in mitbewegtem Koordinatensystem parametrisiert nach s
2. Reihenentwicklung der Felder



Gesucht: Ableitung der Einheitsvektoren parametrisiert nach der Bahn s

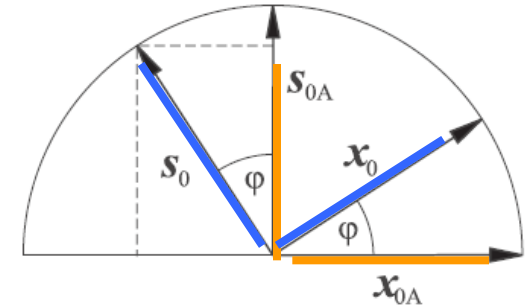
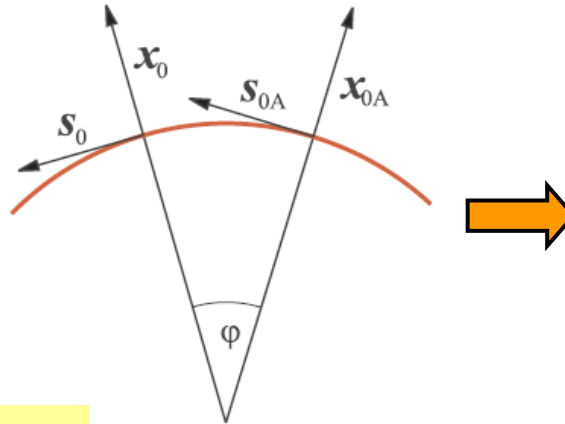
Annahme 1: Sollbahn befindet sich in horizontaler Ebene
→ K dreht sich bei der Bewegung nur um y -Achse

Drehung um z-Achse

Es gilt für die Einheitsvektoren:

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_{0A} \cos \varphi + \vec{s}_{0A} \sin \varphi$$

$$\vec{s}_0 = -\vec{x}_{0A} \sin \varphi + \vec{s}_{0A} \cos \varphi$$



Ableitung nach φ :

$$\frac{d\vec{x}_0}{d\varphi} = -\vec{x}_{0A} \sin \varphi + \vec{s}_{0A} \cos \varphi = \vec{s}_0$$

$$\frac{d\vec{s}_0}{d\varphi} = -\vec{x}_{0A} \cos \varphi - \vec{s}_{0A} \sin \varphi = -\vec{x}_0$$

Longitudinale **Verschiebung bei Drehung** entlang s :

$$ds = R d\varphi \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt}$$

Zeitliche Ableitung der Einheitsvektoren:

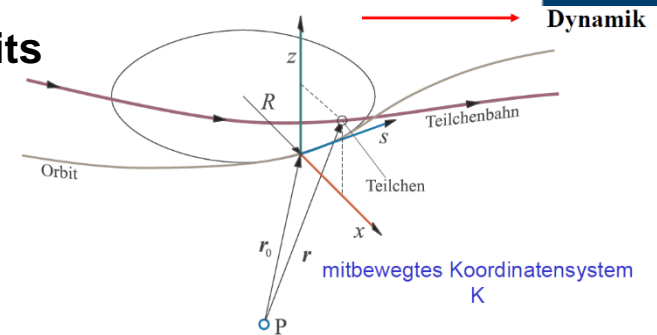
$$\dot{\vec{x}}_0 = \frac{d\vec{x}_0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R} \dot{s} \vec{s}_0$$

$$\dot{\vec{s}}_0 = \frac{d\vec{s}_0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{R} \dot{s} \vec{x}_0$$

$$\dot{y}_0 = 0$$

Verschiebung des Koordinatenursprungs entlang des Orbits

$$d\vec{r}_0 = \vec{s}_0 ds \Rightarrow \dot{\vec{r}}_0 = \dot{s} \vec{s}_0$$



Ortsvektor des Teilchens $\vec{r} = \vec{r}_0 + x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0$

zeitliche Ableitungen
des Ortsvektors

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{r}}_0 + \dot{x} \vec{x}_0 + x \dot{\vec{x}}_0 + \dot{y} \vec{y}_0 + y \dot{\vec{y}}_0 = \dot{s} \vec{s}_0 + \dot{x} \vec{x}_0 + x \dot{\vec{x}}_0 + \dot{y} \vec{y}_0 \\ &= \dot{s} \vec{s}_0 + \dot{x} \vec{x}_0 + \frac{x}{R} \dot{s} \vec{s}_0 + \dot{y} \vec{y}_0 = \dot{x} \vec{x}_0 + \dot{y} \vec{y}_0 + \left(1 + \frac{x}{R}\right) \dot{s} \vec{s}_0 \end{aligned}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\ddot{x} - \left(1 + \frac{x}{R}\right) \frac{\dot{s}^2}{R} \right] \vec{x}_0 + \ddot{y} \vec{y}_0 + \left[\frac{2}{R} \dot{x} \dot{s} + \left(1 + \frac{x}{R}\right) \ddot{s} \right] \vec{s}_0$$

Parametrisierung des Ortsvektors des Teilchens nach s

zeitliche Ableitung
→ räumliche Ableitung nach s

Transformation $\dot{x} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = x' \dot{s}$

$$\dot{\vec{r}} = x' \dot{s} \vec{x}_0 + y' \dot{s} \vec{y}_0 + \left(1 + \frac{x}{R}\right) \dot{s} \vec{s}_0$$

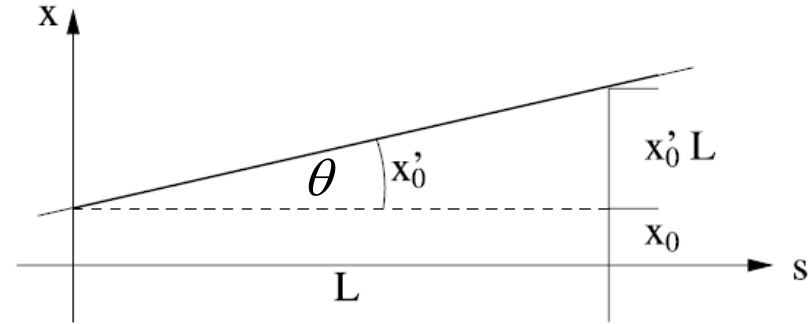
$$\ddot{x} = \dot{x}' \dot{s} + x' \ddot{s} = x'' \dot{s}^2 + x' \ddot{s}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left[x'' \dot{s}^2 + x' \ddot{s} - \left(1 + \frac{x}{R}\right) \frac{\dot{s}^2}{R} \right] \vec{x}_0 + (y'' \dot{s}^2 + y' \ddot{s}) \vec{y}_0 + \left[\frac{2}{R} x' \dot{s}^2 + \left(1 + \frac{x}{R}\right) \ddot{s} \right] \vec{s}_0$$

Was ist eigentlich $x'(s)$?

$x(s)$: Ortskomponente,
 $[x(s)] = 1 \text{ mm}$

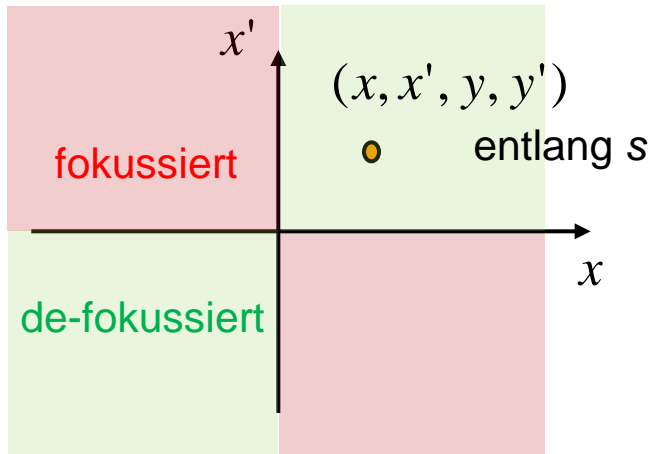
$x'(s)$: zugehörige Richtungs-
 abweichung
 $[x'(s)] = 1 \text{ mrad}$



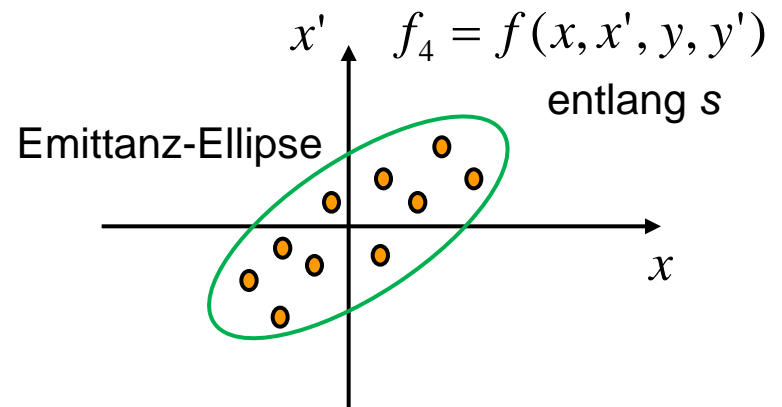
$$x' = \frac{dx}{ds} \approx \frac{p_x}{p_z} = \tan \theta$$

Koordinaten in der Beschleuniger-Physik: transversaler Phasenraum

Ein-Teilchen-Beschreibung



Teilchen-Ensemble (*nächste Vorlesung*)



Begleitendes Dreibein eingesetzt in Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \frac{q}{\gamma m_0} (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_s \end{pmatrix}$$

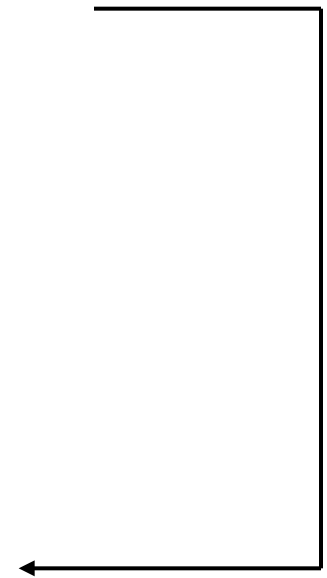
Annahme 2: Keine longitudinale Komponente des Magnetfeldes $B_s = 0$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{\gamma m_0} \left[\begin{pmatrix} x' \dot{s} \\ y' \dot{s} \\ \left(1 + \frac{x}{R}\right) \dot{s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{q}{\gamma m_0} \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{x}{R}\right) \dot{s} B_y \\ \left(1 + \frac{x}{R}\right) \dot{s} B_x \\ x' \dot{s} B_y - y' \dot{s} B_x \end{pmatrix}$$

Betrachtung der transversalen Bewegungsgleichungen

(longitudinale Bewegungsgleichungen siehe spätere Vorlesung)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \left[x'' \dot{s}^2 + x' \ddot{s} - \left(1 + \frac{x}{R}\right) \frac{\dot{s}^2}{R} \right] = -\frac{q}{\gamma m_0} \left(1 + \frac{x}{R}\right) \dot{s} B_y \\ \textcircled{2} \quad & (y'' \dot{s}^2 + y' \ddot{s}) = \frac{q}{\gamma m_0} \left(1 + \frac{x}{R}\right) \dot{s} B_x \end{aligned}$$



Herleitung Hill'sche Differentialgleichung: Weitere Vereinfachung

Annahme 3: Die Geschwindigkeit der Teilchen ändert sich praktisch nicht, also $\dot{s} \approx 0$

Einführung der Abhängigkeit von Impuls

$$\rho = \beta \gamma m_0 c = \gamma m_0 v$$

ACHTUNG:
 $v \neq \dot{s}$

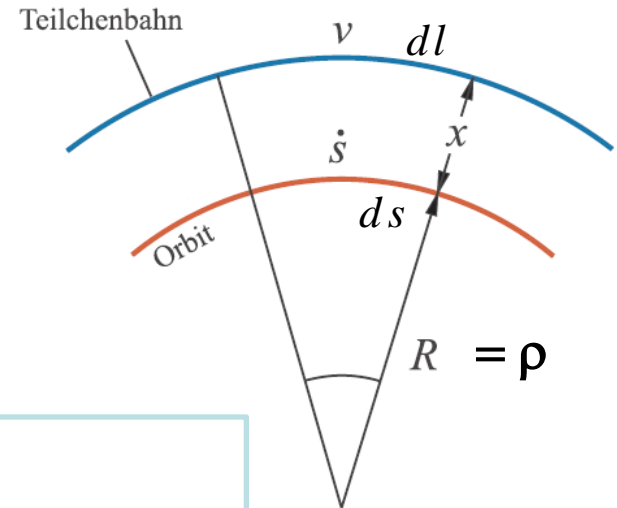
anschaulich

$$v = \dot{s} \frac{\rho + x}{\rho} = \dot{s} \left(1 + \frac{x}{\rho} \right)$$

oder

$$v = \frac{dl}{ds} = \dot{s} l' \Rightarrow$$

$$l' = \frac{v}{\dot{s}} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + \left(1 + \frac{x}{R} \right)^2}$$



Annahme 4: Transversale Teilchengeschwindigkeiten sind sehr viel kleiner als longitudinale (Paraxiale Näherung)

$$x'^2, y'^2 \ll \left(1 + \frac{x}{R} \right)^2$$

$$\Rightarrow l' = \frac{v}{\dot{s}} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + \left(1 + \frac{x}{R} \right)^2} \approx \left(1 + \frac{x}{R} \right)$$

$$\ddot{s} \approx 0$$

und

$$\frac{v}{\dot{s}} = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)$$

$$\textcircled{1} \quad \left[x'' \dot{s}^2 + \cancel{x' \ddot{s}} - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{\dot{s}^2}{\rho} \right] = -\frac{q}{\gamma m_0} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} B_y \quad \left. \vphantom{\textcircled{1}} \right| : \dot{s}^2$$

$$x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} = -\frac{q}{\gamma m_0 \dot{s}} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) B_y = -\frac{q v}{\rho \dot{s}} B_y \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) = -\frac{q}{\rho} B_y \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\textcircled{2} \quad (y'' \dot{s}^2 + \cancel{y' \ddot{s}}) = \frac{q}{\gamma m_0} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} B_x \quad \left. \vphantom{\textcircled{2}} \right| : \dot{s}^2$$

$$y'' = \frac{q}{\gamma m_0 \dot{s}} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) B_x = \frac{q v}{\rho \dot{s}} B_x \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) = \frac{q}{\rho} B_x \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

Annahme 4: Sollteilchen hat Impuls p_0 . Beliebige Teilchen haben dann einen Impuls

$p = p_0 + \Delta p$, wobei $\Delta p / p \ll 1$ und somit

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0 + \Delta p} \approx \frac{1}{p_0} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) \quad \text{Reihenentwicklung nach } \Delta p$$

1

$$x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \frac{1}{\rho} = -\frac{q}{\rho} B_y \left(1 + \frac{x}{\rho} \right)^2$$

$$\Rightarrow x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \frac{1}{\rho} = -\frac{q}{\rho_0} B_y \left(1 + \frac{x}{\rho} \right)^2 \left(1 - \frac{\Delta p}{\rho_0} \right)$$

2

$$y'' = \frac{q}{\rho} B_x \left(1 + \frac{x}{\rho} \right)^2$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{q}{\rho_0} B_x \left(1 + \frac{x}{\rho} \right)^2 \left(1 - \frac{\Delta p}{\rho_0} \right)$$

Magnetfeld

Betrachtung in horizontaler Ebene: Zentrifugalkraft = Lorentzkraft

$$\frac{mv_s^2}{\rho} = -qv_s B_y \Rightarrow \frac{1}{\rho(x, y, s)} = \left| \frac{q}{p} B_y(x, y, s) \right| = \left| \frac{qc}{\beta E} B_y(x, y, s) \right|$$

Reihenentwicklung $\frac{q}{p} B_y(x) = \frac{q}{p} B_{y0} + \frac{q}{p} \frac{dB_y}{dx} x + \frac{1}{2!} \frac{q}{p} \frac{d^2 B_y}{dx^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{q}{p} \frac{d^3 B_y}{dx^3} x^3 + \dots$

$$= \frac{1}{\rho} + k x + \frac{1}{2!} m x^2 + \frac{1}{3!} o x^3 + \dots$$

Dipol Quadrupol Sextupol Oktupol
(Ablenkung) (Fokussierung) (Kompensation der Chromatizität) (Feldfehler oder Feldkompensation)

Annahme 5: Teilchen wird bei seiner Bewegung in der horizontalen Ebene abgelenkt und fokussiert. Höhere Terme des Magnetfeldes werden erstmal vernachlässigt.

x-Richtung: Dipol + Quadrupol $\rightarrow \frac{q}{p} B_y(x) = \left(\frac{1}{\rho} - k x \right)$

y-Richtung: nur Quadrupol $\rightarrow \frac{q}{p} B_x(y) = k y$

Definition

$k < 0$: in x fokussierender Quadrupol

$k > 0$: in x defokussierender Quadrupol

(Ungleiche Vorzeichen: Quadrupole fokussieren in die eine und defokussieren in die andere Richtung, siehe vorherige Vorlesung)

Magnetfeld eingesetzt in Bewegungsgleichung

$$① \quad x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} = -\frac{q}{\rho_0} B_y \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)$$

$$\Rightarrow x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} = -\left(\frac{1}{\rho} - k x\right) \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)$$

$$② \quad y'' = \frac{q}{\rho} B_x \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)$$

$$\Rightarrow y'' = k y \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)$$

Ausmultiplizieren

Annahme 6: Terme mit Quadraten oder Produkten aus x , y , oder $\Delta\rho/\rho$ können vernachlässigt werden, da $x, y \ll R$ und $\Delta\rho/\rho \ll 1$ (daher **lineare** Strahloptik)

Endergebnis

$$x''(s) + \left(\frac{1}{\rho^2(s)} - k(s)\right) x(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

$$y''(s) + k(s) y(s) = 0$$

Fundamentale Bewegungsgleichungen der linearen Strahloptik

(lineare, inhomogene DGL vom Hillschen Typ)

Herleitung Hill'sche Differentialgleichung

Die Hillsche Differentialgleichung gilt auch für **elektrische Felder**:

$$x''(s) + \left(\frac{1}{\rho^2(s)} - k(s) \right) x(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

$$= K_x(s) \quad \swarrow$$

$$y''(s) + k(s) y(s) = 0$$

$$= K_y(s) \quad \nwarrow$$

Magnetisch: Impuls-abhängig
Elektrisch: Energie-abhängig

die Form bleibt erhalten und

K wird dann entsprechend definiert, z.B.

$$K_x = \frac{q}{\rho v} E_x(x) = \frac{1}{\rho} + k x + \dots$$

1

$$x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} = -\frac{q}{\rho_0 v} E_x \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)$$

$$\Rightarrow x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} = -\left(\frac{1}{\rho} - k x\right) E_x \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)$$

$$\Rightarrow x''(s) + \left(\frac{1}{\rho^2(s)} - k(s)\right) x(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

2

$$y'' = \frac{q}{\rho_0 v} E_z \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)$$

$$\Rightarrow y'' = k y \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) \quad \Rightarrow y''(s) + k(s) y(s) = 0$$

Magnetische Steifigkeit:

$$\rho B = \frac{p}{q}$$

Elektrische Steifigkeit:

$$\rho E = \frac{p v}{q}$$

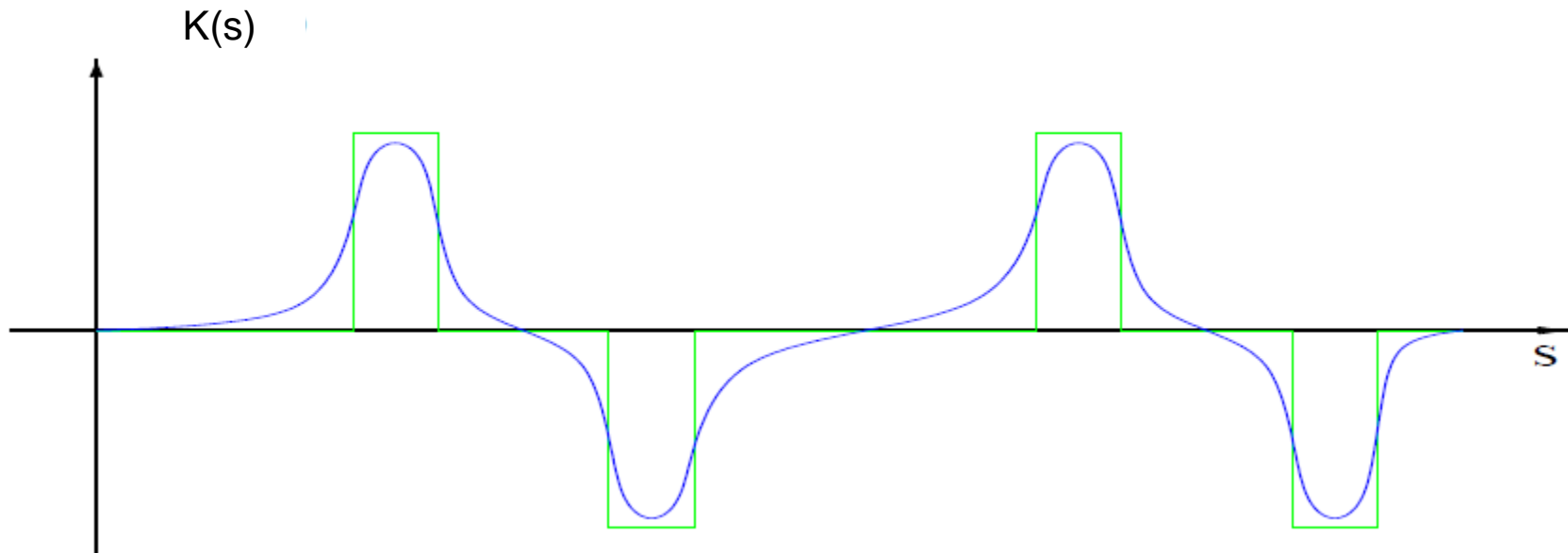
Lösungen der homogenen DGL (Impulsunschärfe des Strahls $\Delta p = 0$):

Betrachtung für x-Richtung:

$$x''(s) + K_x(s) x(s) = \frac{1}{R(s)} \frac{\Delta p}{p} \Rightarrow x''(s) + K_x(s) x(s) = 0$$

$K(s)$ ist eine sich entlang des Beschleunigers ändernde Funktion. Analytische Lösungen existieren jeweils nur für diese stückweise konstante $K(s)=K$.

→ **Annahme für analytische Lösung**: $K(s) = K = \text{konstant}$



Allgemeine Lösungen der **homogenen** Hillschen Differentialgleichung

Ansatz: sinus- und cosinusartige Funktionen als linear unabhängige Lösungen

$$C(s) = \cos(\sqrt{K}s) \quad \text{und} \quad S(s) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \quad \text{für} \quad K > 0$$

$$C(s) = \cosh(\sqrt{K}s) \quad \text{und} \quad S(s) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh(\sqrt{K}s) \quad \text{für} \quad K < 0$$

erfüllen die Anfangsbedingungen...

...und bilden als Linearkombination die Lösung:

$$C(0) = 1 \quad \text{und} \quad S(0) = 0$$

$$C'(0) = \frac{dC}{ds} = 0 \quad \text{und} \quad S'(0) = \frac{dS}{ds} = 1$$

$$x(s) = C(s) x_0 + S(s) x_0'$$

$$x'(s) = C'(s) x_0 + S'(s) x_0'$$



Betatronschwingung: transversale Schwingung des Teilchens um die Sollbahn, Resultat von x und x' gegenüber Sollbahn

Matrixformalismus: Die allgemeine Lösung der homogenen DGL

lässt sich auch schreiben als

$$x(s) = C(s) x_0 + S(s) x_0'$$

$$x'(s) = C'(s) x_0 + S'(s) x_0'$$

Wichtig:

Determinante der
Transfermatrix = 1

$$\begin{array}{c} \text{Teilchenvektor} \\ \text{hinter optischem} \\ \text{Element} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{red arrow}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}}_{\text{Teilchenvektor}} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_x(s) & S_x(s) \\ C_x'(s) & S_x'(s) \end{pmatrix}}_{\text{Transfermatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_0(s) \\ x_0'(s) \end{pmatrix}}_{\text{Teilchenvektor}} \end{array}$$

des optischen
Elements
vor optischem
Element

Analoges Vorgehen für y-Richtung ergibt die Transformationsmatrix $M_y = \begin{pmatrix} C_y(s) & S_y(s) \\ C_y'(s) & S_y'(s) \end{pmatrix}$
Jeweils 2x2 Matrix für eine Raumrichtung (wenn keine Kopplung vorliegt)

Konkretes Beispiel: Teilchen mit Sollimpuls fliegt durch einen Quadrupol der Länge L

Wie sieht die Transportmatrix aus, wenn $K_x(s) = k > 0$ und $K_y(s) = k < 0$?

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}L) & 1/\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}L) \\ -\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}L) & \cos(\sqrt{k}L) \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{k}L) & 1/\sqrt{k} \sinh(\sqrt{k}L) \\ \sqrt{k} \sinh(\sqrt{k}L) & \cosh(\sqrt{k}L) \end{pmatrix}$$

Lösungen der inhomogenen DGL ($\Delta p \neq 0$):

$$x''(s) + K(s)x(s) = h(s)\delta \quad \text{mit} \quad h(s) = \frac{1}{R(s)} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{\Delta p}{p}, \quad [\delta] = 1 \text{ promille}$$

Allgemeine Lösung ist Linearkombination aus homogener und spezieller Lösung:

$$\underbrace{x(s)}_{\text{dispersive Bahn}} = C_x(s)x_0 + S_x(s)x_0' + D_x(s)\delta \quad \text{und} \quad x'(s) = C_x'(s)x_0 + S_x'(s)x_0' + D_x'(s)\delta$$

dispersive Bahn: spezielle Lösung der DGL mit Dispersionsfunktion

Dispersionsbahn: $\delta=1$



Dispersion: sorgt für zusätzliche transversale (und auch longitudinale) Schwingung um die Sollbahn
in linearer Strahloptik: Beitrag nur durch Dipole

Dispersionsfunktion erfüllt die Anfangsbedingungen $D_x(0) = 0$ und $D_x'(0) = 0$

Matrixformalismus:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x(s) & S_x(s) & 0 & 0 & D_x(s) \\ C_x'(s) & S_x'(s) & 0 & 0 & D_x'(s) \\ 0 & 0 & C_y(s) & S_y(s) & 0 \\ 0 & 0 & C_y'(s) & S_y'(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ y_0 \\ y_0' \\ \delta_0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der speziellen Lösung = Dispersionsfunktion

Nach einem Theorem (siehe Hinterberger) folgt für die spezielle Lösung

$$D_x = S_x(s, s_0) \int_{s_0}^s \frac{C_x(u, s_0)}{\rho(u)} du - C_x(s, s_0) \int_{s_0}^s \frac{S_x(u, s_0)}{\rho(u)} du$$
$$D_x' = S_x'(s, s_0) \int_{s_0}^s \frac{C_x(u, s_0)}{\rho(u)} du - C_x'(s, s_0) \int_{s_0}^s \frac{S_x(u, s_0)}{\rho(u)} du$$

Konkretes Beispiel: Teilchen mit Impulsabweichung Δp fliegt durch ein optisches Element der Länge L und der fokussierstärke k ($k=k$ für Quadrupol, $k=-1/\rho^2$ für Dipol)

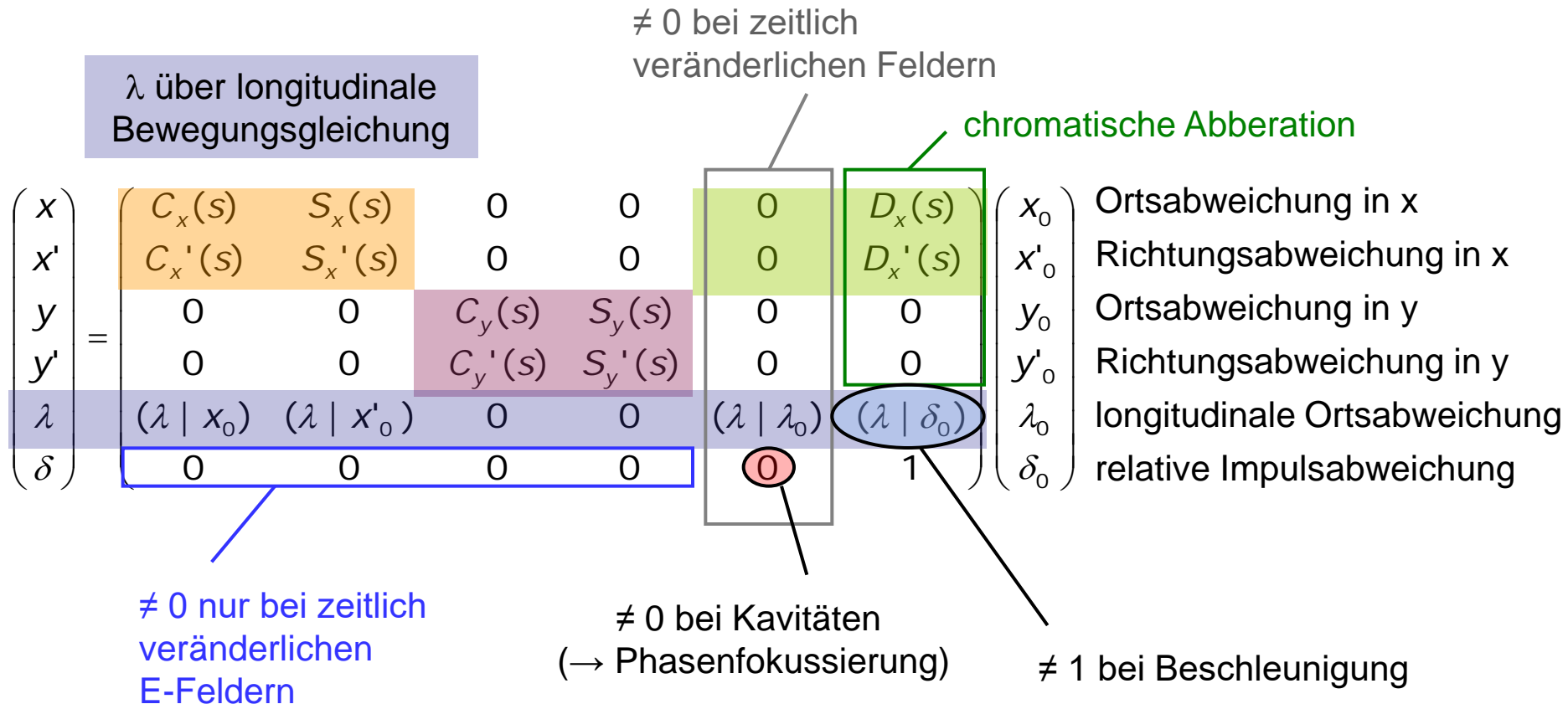
$$D_x(s, 0) = S_x(s, 0) \int_{s_0}^s \frac{C_x(u, 0)}{\rho(u)} du - C_x(s, 0) \int_{s_0}^s \frac{S_x(u, 0)}{\rho(u)} du$$

$$D_x(L, 0) = \frac{1}{\rho \sqrt{k}} \sin(\sqrt{KL}) \int_0^L \cos(\sqrt{ku}) du - \frac{1}{\rho \sqrt{k}} \cos(\sqrt{KL}) \int_0^L \sin(\sqrt{Ku}) du = \frac{1 - \cos(\sqrt{kL})}{\rho k}$$

$$D_x'(s, 0) = S_x'(s, 0) \int_{s_0}^s \frac{C_x(u, 0)}{\rho(u)} du - C_x'(s, 0) \int_{s_0}^s \frac{S_x(u, 0)}{\rho(u)} du$$

$$D_x'(L, 0) = \frac{1}{\rho} \cos(\sqrt{KL}) \int_0^L \cos(\sqrt{ku}) du + \frac{1}{\rho} \sin(\sqrt{KL}) \int_0^L \sin(\sqrt{Ku}) du = \frac{\sin(\sqrt{kL})}{\rho \sqrt{k}}$$

Vollständige Transformationsmatrix



Bisher vernachlässigte s-Richtung: Beginn bei **Folie 7**

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{\gamma m_0} \begin{bmatrix} x' \dot{s} \\ y' \dot{s} \\ \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{q}{\gamma m_0} \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} B_y \\ \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} B_x \\ x' \dot{s} B_y - y' \dot{s} B_x \end{pmatrix}$$

Betrachtung der longitudinalen Bewegungsgleichungen

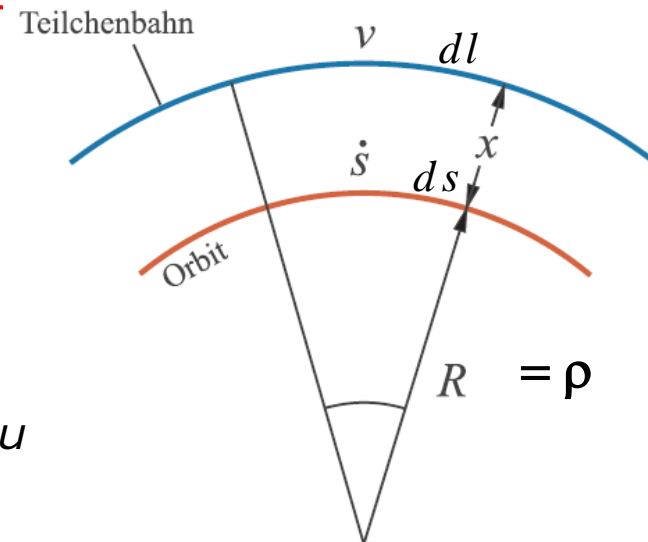
~~3 $\frac{2}{R} x' \dot{s}^2 + \left(1 + \frac{x}{R}\right) \ddot{s} = \frac{q}{\gamma m_0} (x' \dot{s} B_y - y' \dot{s} B_x)$~~

3 $l' = \frac{v}{\dot{s}} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + \left(1 + \frac{x}{R}\right)^2} \approx \left(1 + \frac{x}{R}\right)$

Paraxiale Näherung

$$l' = \frac{dl}{ds} = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \Rightarrow l(s) = l(s_0) + s - s_0 + \int_{s_0}^s \frac{x(u)}{\rho(u)} du$$

l' ist Änderung der Pfadlänge entlang s , keine longitudinale Koordinate!



Was jetzt noch fehlt zur linearen Strahloptik:

longitudinale Ortsabweichung $\lambda(s)$

Ortsabweichung zwischen dem zu beschreibenden Teilchen und dem Sollteilchen für jeden Ort s entlang der Teilchenbahn.

Differenz der longitudinalen Ortsabweichung zwischen Teilchen und Sollteilchen an Ort s_0 und s

$$\begin{aligned}\lambda(s) - \lambda(s_0) &= s - s_0 - \frac{v_0}{v} (I(s) - I(s_0)) \\ &= s - s_0 - \frac{v_0}{v} \left(s - s_0 + \int_{s_0}^s \frac{x(u)}{\rho(u)} du \right)\end{aligned}$$

mit $\Delta v = v - v_0$ und Reihenentwicklung nach Δv

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0 + \Delta v} \approx \frac{1}{v_0} \left(1 - \frac{\Delta v}{v_0} \right)$$

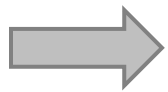
$$\approx (s - s_0) \frac{\Delta v}{v_0} - \int_{s_0}^s \frac{x(u)}{\rho(u)} du$$

$$\text{mit } \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\delta}{\gamma^2}$$

$$\longrightarrow \lambda(s) \approx \lambda(s_0) + (s - s_0) \frac{\delta}{\gamma^2} - \int_{s_0}^s \frac{x(u)}{R(u)} du$$

$$\lambda(s) \approx \lambda(s_0) + (s - s_0) \frac{\delta}{\gamma^2} - \int_{s_0}^s \frac{x(u)}{R(u)} du$$

Jetzt $x(s) = C_x(s) x_0 + S_x(s) x_0' + D_x(s) \delta$ einsetzen:



$$\lambda(s) = \lambda(s_0) + (s - s_0) \frac{\delta}{\gamma^2} - x_0 \int_{s_0}^s \frac{C_x(u)}{R(u)} du - x_0' \int_{s_0}^s \frac{S_x(u)}{R(u)} du - \delta \int_{s_0}^s \frac{d_x(u)}{R(u)} du$$

$$(\lambda | x_0) = - \int_{s_0}^s \frac{C_x(u)}{R(u)} du$$

$$(\lambda | x_0') = - \int_{s_0}^s \frac{S_x(u)}{R(u)} du$$

$$(\lambda | \lambda_0) = 1$$

$$(\lambda | \delta_0) = \frac{(s - s_0)}{\gamma^2} - \int_{s_0}^s \frac{d_x(u)}{R(u)} du$$

Konkretes Beispiel: Drift

$$C_x = 1, \quad C_x' = 0, \quad S_x = L, \quad S_x' = 1$$

$$(\lambda | x_0) = 0$$

$$(\lambda | x_0') = 0$$

$$(\lambda | \lambda_0) = 1$$

$$(\lambda | \delta_0) = \frac{(s - s_0)}{\gamma^2} = \frac{L}{\gamma^2}$$

Konkretes Beispiel: Sektor-Dipol

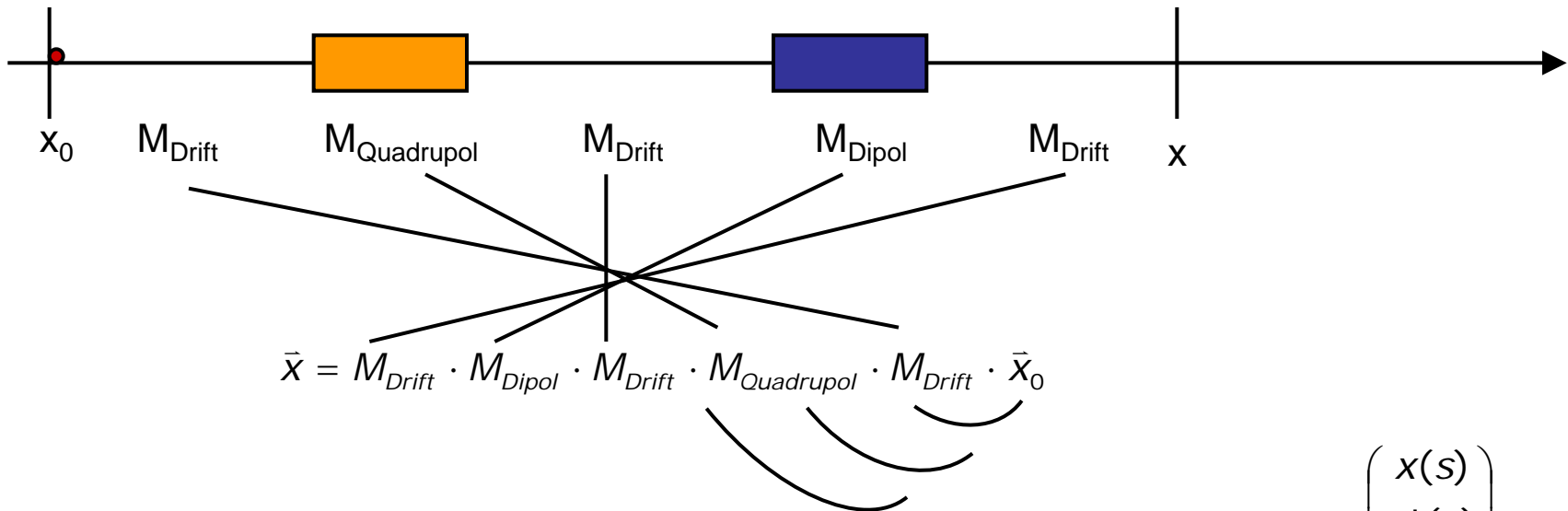
$$C_x = \cos \alpha$$

$$(\lambda | x_0) = - \int_0^L \frac{\cos(s/R)}{R} ds = - \frac{R}{R} \sin(L/R) = -\sin(\alpha)$$

... und entsprechend für die anderen Komponenten

Berechnung einer Gesamt-Transportmatrix

Zur Berechnung der Transfermatrix für ein System aus verschiedenen optischen Elementen werden die Transfermatrizen der einzelnen Elemente miteinander rückwärts multipliziert



$$\vec{z}(s_1) = M_1(s_1, s_0) \cdot \vec{z}(s_0)$$

$$\vec{z}(s_2) = M_2(s_2, s_1) \cdot \vec{z}(s_1)$$

$$= M_2(s_2 - s_1, s_0) \cdot M_1(s_1, s_0) \cdot \vec{z}(s_1)$$

$$= M_2(L_2, s_0) \cdot M_1(L_1, s_0) \cdot \vec{z}(s_0)$$

$$\vec{z}(s_2) = M_3(L_3, s_0) \cdot M_2(L_2, s_0) \cdot M_1(L_1, s_0) \cdot \vec{z}(s_0)$$

mit $\vec{z}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \\ \lambda(s) \\ \delta(s) \end{pmatrix}$

Lösungen der Hillsche Differentialgleichung für spezielle optische Elemente

Lösung für Drift

$$x = x_0 + L x_0'$$

$$x' = x_0'$$

$$y = y_0 + L y_0'$$

$$y' = y_0'$$

$$\lambda = \lambda_0 + (L / \gamma^2) \delta_0$$

$$\delta = \delta_0$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L / \gamma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

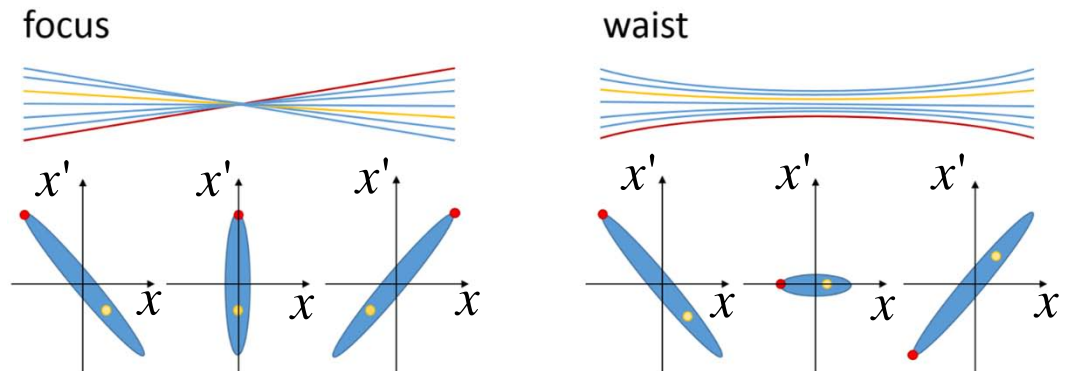
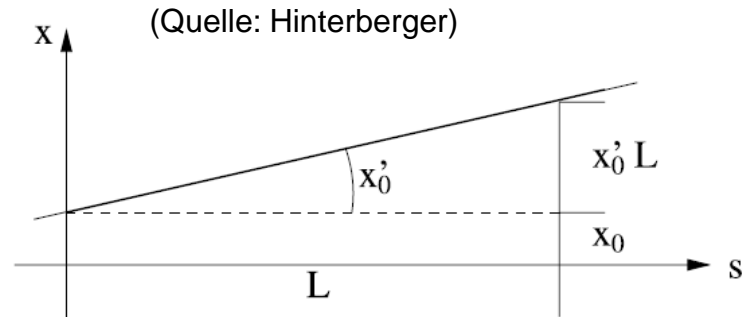


Abbildung	radial	axial
Punkt-zu-Punkt	$R_{12} = (x x') = 0$	$R_{34} = (y y') = 0$
Punkt-zu-Parallel	$R_{22} = (x' x') = 0$	$R_{44} = (y' y') = 0$
Parallel-zu-Punkt	$R_{11} = (x x) = 0$	$R_{33} = (y y) = 0$
Parallel-zu-Parallel	$R_{21} = (x' x) = 0$	$R_{43} = (y' y) = 0$
Ortsdispersion = 0	$R_{16} = (x \delta) = 0$	
Winkeldispersion = 0	$R_{26} = (x' \delta) = 0$	

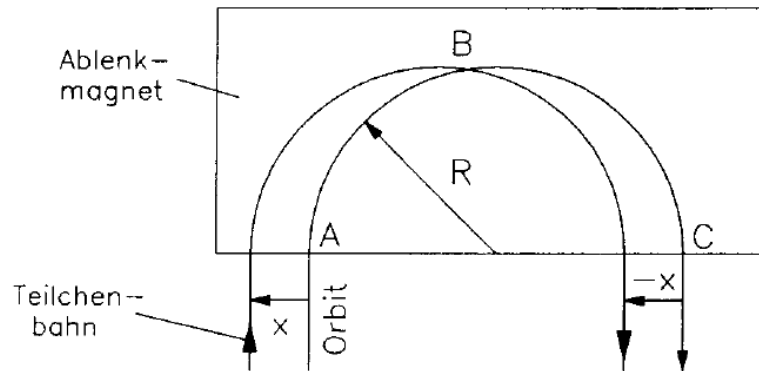
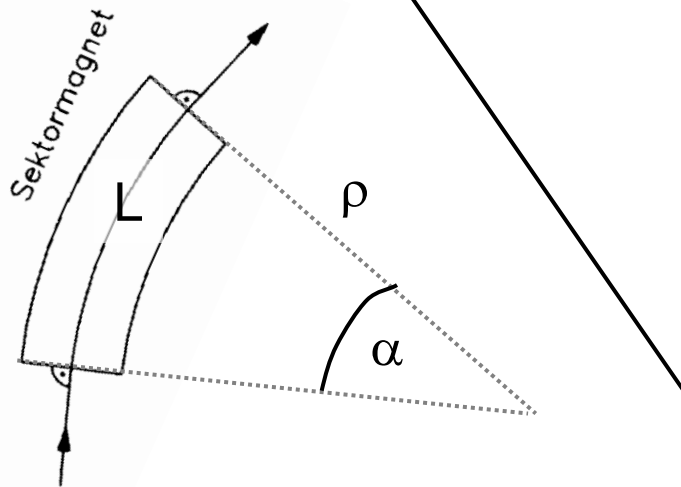
Optische Abbildungsbedingungen (Quelle: Hinterberger)

Lösung für Dipolmagnete ($K(s) = 1/\rho^2$ und Länge $L = \rho \cdot \alpha$)

• **Sektormagnete (ohne Kantenfokussierung)**

$$M_{\text{Sektor}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \rho \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & \rho(1 - \cos(\alpha)) \\ -\frac{1}{\rho} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \rho\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & -\rho(1 - \cos(\alpha)) & 0 & 0 & 1 & \frac{\rho\alpha}{\gamma^2} - \rho(\alpha - \sin(\alpha)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dispersion:
magnetischer
Dipol als
Impuls-Spektrometer



Dipolmagnete fokussieren in horizontale Richtung
(schwache Fokussierung)

Lösung für Dipolmagnete ($K(s) = 1/\rho^2$ und Länge $L = \rho \cdot \alpha$)

• **Rechteckmagnete (Dipole mit Kantenfokussierung)**

$$M_{\text{Kante}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \tan(\beta) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \tan(\beta) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kantenfokussierung:

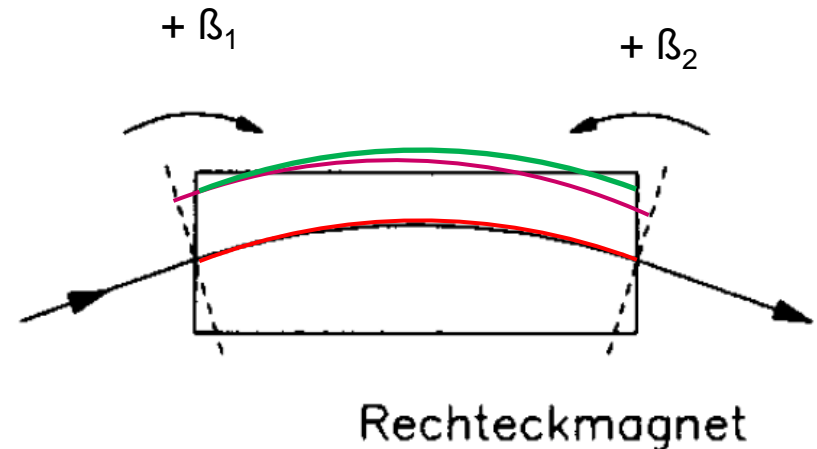
Drehung der Stirnflächen verursacht horizontal eine Defokussierung und vertikal eine Fokussierung
Abhängig vom Drehwinkel β

→ wirkt horizontal der schwachen Fokussierung entgegen

→ $M_{\text{Rechteck}} = M_{\text{Kante}}^{\beta_2} \cdot M_{\text{Sektor}} \cdot M_{\text{Kante}}^{\beta_1}$

Pink: Teilchenbahn mit Ortsablage x bei Sektor-Magnet

Grün: Teilchenbahn mit Ortsablage x bei Rechteck-Magnet



Schwache Fokussierung

(max. eine Oszillation um die Sollbahn pro Umlauf)

Verwendete bei Betatron und Zyklotron

Vertikale Fokus.: Verformung der Magnetpole

Horizontale Fokus.: Bahnkrümmung

Nachteile:

- Vertikale Feldkomponente defokussiert horizontal
- Langwellige Betatron-Oszillationen
→ große Apertur

Synchrophasotron in Dubna:

Luftspalt 40 cm x 2 m, Gesamtmasse: 36 kt

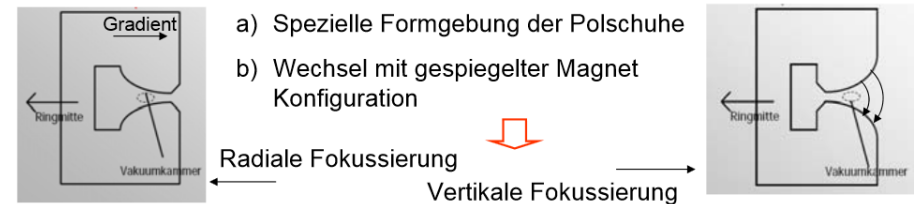


Alternierende Gradienten Fokussierung

Durchbruch für den Bau großer Synchrotron!

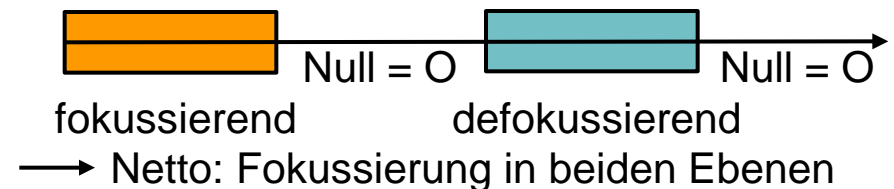
1950-1952: Christophilos, Courant, Snyder, Livingston, Blewett

- Alternating Gradient Synchrotron (AGS)
CERN 25 GeV Proton Synchrotron (1959)
Brookhaven 33 GeV AGS (1960)



Starke Fokussierung mit Quadrupolen

FODO-Zelle



Details: siehe Vorlesung 5

Lösung für Quadrupole ($K(s) = k$ und Länge L)

- $k < 0$: fokussierend in x , defokussierend in y

$$M_{k < 0} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{|k|}L) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{|k|}L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{|k|} \sin(\sqrt{|k|}L) & \cos(\sqrt{|k|}L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\sqrt{|k|}L) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh(\sqrt{|k|}L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|k|} \sinh(\sqrt{|k|}L) & \cosh(\sqrt{|k|}L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $k > 0$: defokussierend in x , fokussierend in y

$$M_{k > 0} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{k}L) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh(\sqrt{k}L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{k} \sinh(\sqrt{k}L) & \cosh(\sqrt{k}L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\sqrt{k}L) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}L) & \cos(\sqrt{k}L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

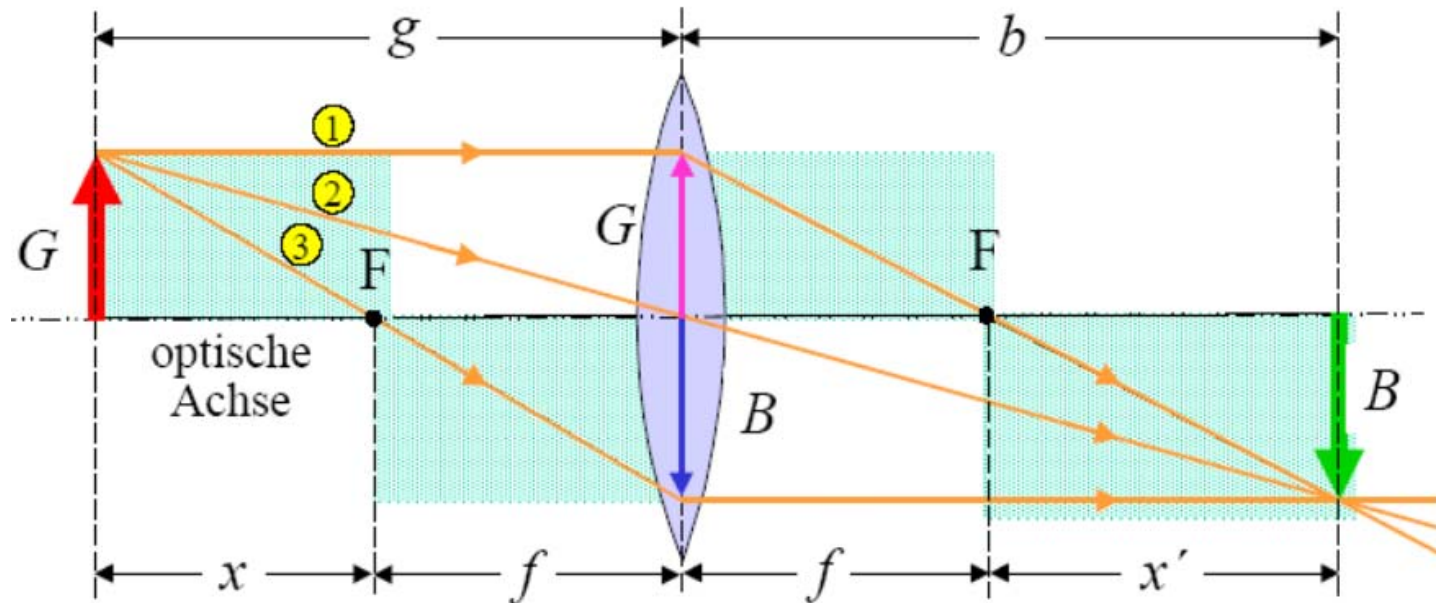
EINSCHUB: Dünne Linsen-Näherung

Analogie zur Lichtoptik

Gültigkeit der Näherung: $\sqrt{k} L \ll \pi / 2$

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}L) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}L) \\ -\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}L) & \cos(\sqrt{k}L) \end{pmatrix} \longrightarrow M_x = \begin{pmatrix} 1 & L \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

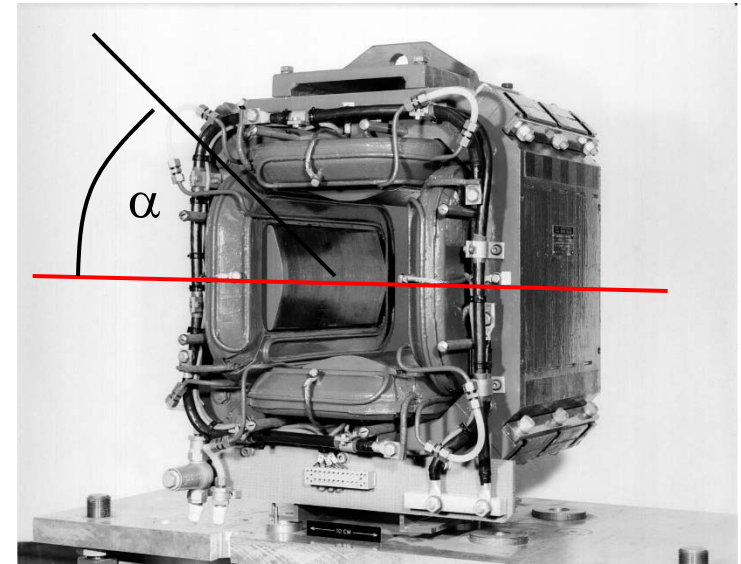
Brennweite f



Lösung für Skew Quadrupol ($\alpha = 45^\circ$)

Für eine Drehung des Strahls um den Winkel α gilt:

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$M_{\text{Skew}} = M(-45^\circ) \cdot M_{\text{Quadrupol}} \cdot M(45^\circ) \quad \text{mit} \quad M(45^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung für Solenoide

Bereich des homogenen Magnetfeldes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & (L \sin \alpha) / \alpha & 0 & -L(1 - \cos \alpha) / \alpha \\ 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & L(1 - \cos \alpha) / \alpha & 1 & (L \sin \alpha) / \alpha \\ 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

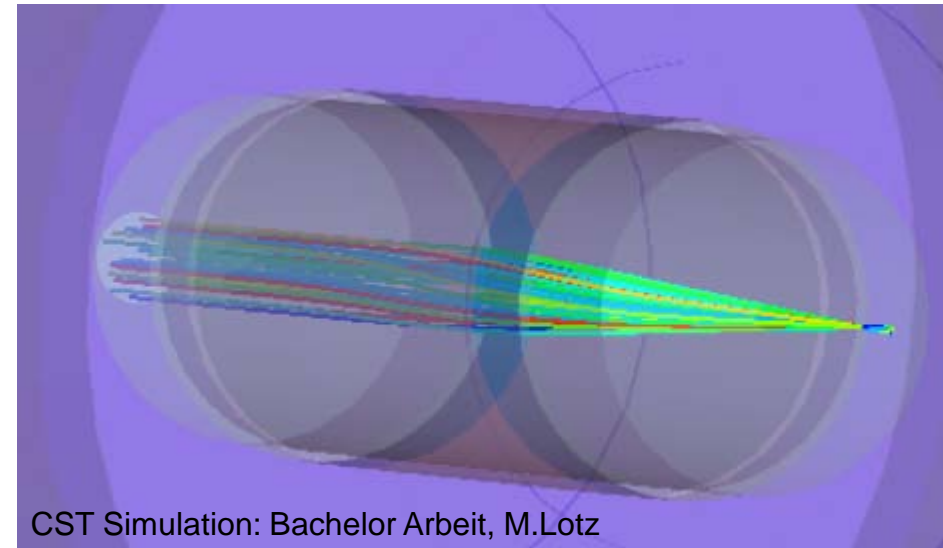
Randbereich des Magnetfeldes

$$M_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \pm K & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{positives} \\ \text{für Eingang,} \\ \text{negatives für} \\ \text{Ausgang aus} \\ \text{Solenoide} \end{array}$$

Gesamte Transfermatrix

$$M = M_{+} \cdot M \cdot M_{-}$$

$$= \begin{pmatrix} C^2 & SC/K & SC & S^2/K & 0 & 0 \\ -KSC & C^2 & -KS^2 & SC & 0 & 0 \\ -SC & -S^2/K & C^2 & SC/K & 0 & 0 \\ KS^2 & -SC & -KSC & C^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L/\gamma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



wobei $C = \cos(KL)$

mit $KL = -\frac{\alpha}{2}$

und $\alpha = \frac{qB_s L}{\gamma m v_z}$

Kopplung der Phasenunterräume

$S = \sin(KL)$

Aberrationen

Abbildungsfehler in der Linearen Strahldynamik beschreibbar durch Strahldynamik höherer Ordnung (Kräfte höherer Ordnung)

$$x(s) = (x | x) x_0 + (x | x') x_0' + (x | \delta) \delta_0 + (x | xx) x_0^2 + (x | xx') x_0 x_0' + \dots$$

Chromatische Aberration: alle auf Impulsabweichung zurückgehende Abbildungsfehler

Geometrische Aberration: durch lokale Abweichungen von Linearität verursachte Abbildungsfehler, z.B. durch Fabrikation, Füllgrad, ...

Sextupole...

Sextupole: Korrektur der Chromatizität, Kompensation der chromatischen Aberration (Abhängigkeit der Fokussierungsstärke der Quadrupole vom Teilchenimpuls)

Raumladung

nur beschreibbar, soweit Raumladungskräfte linear sind, zusätzliche defokussierende Kraft
raumladungsdominiert \leftrightarrow emittanzdominiert

