

# Kapitel 6

Transversale Strahldynamik:  
Dispersion, Strahlstabilität,  
Resonanzen

# 1. Dispersion

Die transversalen Bewegungsgleichungen in linearer Näherung in einem Beschleuniger haben wir abgeleitet zu

$$x'' + \left( \frac{1}{\rho} - k(s) \right) \cdot x = h(s) \cdot \delta \quad \text{mit} \quad h(s) = \frac{1}{\rho(s)} \quad ; \quad \delta = \frac{\Delta p}{p_0}$$
$$y'' + k(s) \cdot y = 0$$

Man kann nun die beiden Gleichungen in Hillsche-DGLs umwandeln, indem man folgende Beziehungen nutzt:

$$k_x(s) = k_m^2(s) + \frac{1}{\rho^2(s)} \quad ; \quad k_y(s) = -k_m^2(s) \tag{6.1}$$

$$\longrightarrow \quad x'' + k_x(s) \cdot x = h \cdot \delta \quad , \quad y'' + k_y(s) \cdot y = 0$$

Für die allgemeine Lösung für monoenergetische Teilchen ( $\delta = 0$ ) erhalten wir homogene DGLs, deren Lösungen wir durch cosinus- und sinusartige Funktionen ermitteln konnten. Daraus haben wir die lineare Strahloptik abgeleitet.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lässt sich als Linearkombination einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL  $x'' + k_x(s) \cdot x = h \cdot \delta$  mit der allgemeinen Lösung der homogenen DGL  $x_D(s) = D(s) \cdot \delta$  schreiben, wobei  $x(s)$  die normale Betatronschwingung ist, also die Lösung der homogenen Hillschen DGL darstellt:

$$x_\delta(s) = x_D(s) + x(s)$$

$$x_\delta'' + k_x \cdot x_\delta = h \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad x'' + x_D'' + k_x x + k_x x_D = h \cdot \delta$$

Da  $x'' + k_x x = 0$  ergibt sich  $x_D'' + k_x x_D = h \cdot \delta$  und somit

$$D'' \delta + k_x D \delta = h \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad D''(s) + k_x(s) D(s) = h(s) \quad (6.2)$$

$D(s)$  wird auch **Dispersionsfunktion** genannt. Die Dispersion beschreibt den Einfluss einer Impulsabweichung auf den Ort und den Winkel in transversale Richtung:

$$D_x(s) \delta_0 = x_D \quad , \quad D'_x(s) \delta_0 = x'_D$$

Die Lösung der homogenen DGL ergibt sich aus  $D_h(s) = D_0 \cdot C(s) + D'_0 \cdot S(s)$   
Zusammen mit der partikulären Lösung der inhomogenen DGL erhält man

$$D(s) = D_0 \cdot C(s) + D'_0 \cdot S(s) + d(s)$$

Die Dispersionsfunktion erfüllt die Startbedingungen  $D(0) = 0, D'(0) = 0$ .

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen eine spezielle Bahn  $D(s)$  zu bestimmen mit  $\delta = 1$ . Diese nennt man **Dispersionsbahn**. Da die Dispersion von den Ablenkmagneten dominiert wird, gilt mit

$$k_x(s) = \frac{1}{\rho^2(s)} = h^2 \quad ; \quad D''(s) + h^2 D(s) = h \quad (6.3)$$

Da  $h = \text{const.}$  ist die partikuläre Lösung  $D_p = C = \text{const.}$  Und damit folgt

$$h^2 C = h \Rightarrow C = \frac{1}{h} \quad \longrightarrow \quad D(s) = A \cdot \cos(hs) + B \cdot \sin(hs) + \frac{1}{h}$$

$$D_0 = A + \frac{1}{h} \Rightarrow A = D_0 - \frac{1}{h} \quad \text{und} \quad D'_0 = B \cdot h \Rightarrow B = \frac{D'_0}{h}$$

$$\Rightarrow D(s) = \left(D_0 - \frac{1}{h}\right) \cdot \cos(hs) + \frac{D'_0}{h} \cdot \sin(hs) + \frac{1}{h} \quad (6.4)$$

mit  $\rho = 1/h$  erhalten wir für den Ablenkmagneten:

$$D(s) = D_0 \cdot \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) + D'_0 \rho \cdot \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + \rho \left(1 - \cos\left(\frac{s}{\rho}\right)\right)$$

$$D'(s) = -\frac{D_0}{\rho} \cdot \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + D'_0 \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) + \sin\left(\frac{s}{\rho}\right)$$

$$\begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) & \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) & \rho \left(1 - \cos\left(\frac{s}{\rho}\right)\right) \\ -\frac{1}{\rho} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) & \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) & -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_0 \\ D'_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

An einer Stelle an der die Dispersion nicht verschwindet, hat ein Teilchen mit Impulsabweichung

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_0}$$

die Gesamtortsablage  $x_\delta(s) = x_D(s) + x(s) = x(s) + D(s) \frac{\Delta p}{p}$

Teilchen mit Impulsabweichung laufen auf Dispersionsbahnen  $x_D$ . Diese Bahnen haben im Allgemeinen eine andere Länge, als der Sollorbit. D.h. die Bahnlänge im Ringbeschleuniger ist eine Funktion des Impulses.

## 2. Momentum compaction Faktor und $\gamma_t$

Das Verhältnis von relativer Bahnlängenänderung  $\Delta C/C_0$  zur relativen Impulsänderung  $\delta$  nennt man auch **Momentum compaction Faktor**:

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} \Rightarrow \alpha_p = \frac{\Delta C / C_0}{\Delta p / p_0}$$

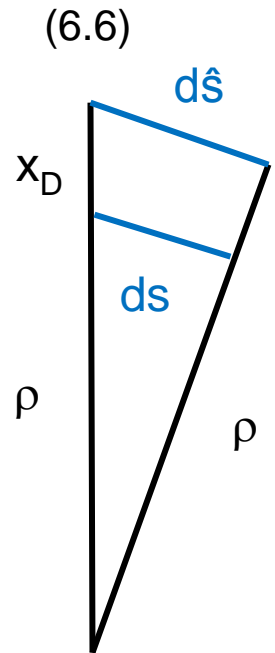
In linearer Näherung liefert  $x_D(s) = D(s) \cdot \delta$  nur in den Bereichen der Ablenkmagnete einen wesentlichen Beitrag zu  $\Delta C/C_0$ .

$$C + \Delta C = \oint d\tilde{s} = \oint ds + \oint \frac{x_D}{\rho} ds$$

$$\Delta C = \oint h \cdot x_D ds = \frac{\Delta p}{p_0} \oint D(s) h(s) ds = \frac{\Delta p}{p_0} \oint \frac{D(s)}{\rho} ds$$

$$\alpha_p = \frac{1}{C_0} \oint D(s) h(s) ds = \frac{1}{C_0} \oint \frac{D(s)}{\rho} ds$$

$$d\tilde{s} = \rho + \frac{x_D}{\rho} ds$$



(6.7)

Variiert man  $D(s)$  mittel der Ionenoptik, so kann man auch  $\alpha_p$  verändern. Die Größe  $\alpha_p$  ist ein Maß für die Dispersion im Bereich der Ablenkmagnete. Je kleiner  $D(s)$ , d. h. je kompakter die Bahnen mit unterschiedlichem  $\Delta p/p_0$  beieinanderliegen, umso kleiner ist  $\alpha_p$ .

# Momentum compaction Faktor und $\gamma_t$

Ein Synchrotron kann nur funktionieren, wenn  $\omega = \omega(p)$ , da  $\omega = 2\pi v/C$ . Damit erhält man

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta C}{C_0} \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p_0} \quad \frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} \quad (6.8)$$

Den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsabweichung und Impulsabweichung (relativistisch) kann man ermitteln durch

$$\frac{dp}{dv} = \frac{m_0 d(\gamma\beta)}{d\beta}$$

Damit erhält man den Zusammenhang zwischen relativem Umlauffrequenzunterschied und der relativen Impulsabweichung.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \left( \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p \right) \frac{\Delta p}{p_0} = \eta \frac{\Delta p}{p_0} \quad (6.9)$$

Nun gibt es ein  $\gamma_{tr}$  für welches  $\eta = \left( \frac{1}{\gamma_{tr}^2} - \alpha_p \right) = 0$  wird.

Dies geschieht bei der entsprechenden Übergangsenergie  $E_{tr} = \gamma_{tr} m_0 c^2$

$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2}$  damit erhalten wir die folgenden Betriebsbereiche:

$$\gamma < \gamma_{tr} \Leftrightarrow \eta > 0 \rightarrow \Delta\omega \text{ w\u00e4chst mit } \Delta p$$

$$\gamma > \gamma_{tr} \Leftrightarrow \eta < 0 \rightarrow \Delta\omega \text{ nimmt ab mit } \Delta p$$

$$\gamma = \gamma_{tr} \Leftrightarrow \eta = 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0$$

Damit laufen die Teilchen isochron im Ring um, unabh\u00e4ngig von deren Impuls. Phasen-fokussierung und Synchrotronschwingung ist nur m\u00f6glich, wenn  $\gamma \neq \gamma_{tr}$  d.h.  $\eta \neq 0$  ist. Daher muss w\u00e4hrend der Hochbeschleunigung beim \u00dcbergang von  $\gamma < \gamma_{tr}$  nach  $\gamma > \gamma_{tr}$  ein HF-Phasensprung von  $\varphi_s$  nach  $\pi - \varphi_s$  stattfinden. Der \u00dcbergang ist ein Spezialproblem der Synchrotronbeschleuniger f\u00fcr Ionen, das nicht immer vermieden werden kann.

In einem Linearbeschleuniger ist  $\alpha_p = 0$  und damit  $\eta = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \varphi = \varphi_s$  .

F\u00fcr extrem relativistische Teilchen strebt  $\eta$  gegen Null, und die Phasenschwingungen "erstarren".



### 3. Die periodische Dispersion

In einem Kreisbeschleuniger unterliegt die Hillsche DGL bestimmten Randbedingungen. Die Koeffizienten  $K(s)$  werden also periodisch:

$$x'' + K(s) \cdot x = 0 \quad K(s + C) = K(s) \quad (6.10)$$

Hierbei ist der Ringumfang gleich  $C$ . Die Hillsche DGL hat große Ähnlichkeit mit der Gleichung des harmonischen Oszillators, nur dass der Koeffizient  $K(s)$  nicht konstant ist (Variation der Oszillatorkonstante). Die Lösung der Hillschen DGL ist

$$x(s) = \sqrt{\mathcal{E}\beta(s)} \cdot \cos(\Psi(s) + \Psi_0)$$

Dabei ist die Betatronfunktion  $\beta(s)$  periodisch. Für das Resonanzverhalten ist der Betatronphasevorschub  $\Delta\Psi = \Psi(s + C) - \Psi(s)$  über einen vollen Umlauf von entscheidender Bedeutung.

Daher definiert man den Arbeitspunkt oder auch **Q-Wert** eines Ring-beschleunigers in der Art

$$Q = \frac{\Delta\Psi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds}{\beta(s)} \quad (6.11)$$

Der Arbeitspunkt gibt anschaulich die Anzahl der Betatronschwingungen an, die ein Teilchen pro Umlauf ausführt.

# Die periodische Dispersion

Im periodischen Lattice gilt

$$\begin{pmatrix} x(s+C) \\ x'(s+C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s, s+C) & s(s, s+C) \\ c'(s, s+C) & s'(s, s+C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}(s, s+C) \vec{x} = \underline{\underline{M}}(s) \vec{x}$$

wobei C der Umfang des Ringes oder die Länge einer Superperiode ist. Aus der allgemeinen Lösung der **Hillschen Differentialgleichung** erhalten wir die Matrix M zu

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_{s \rightarrow s+C} &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\Psi + \alpha(s) \sin \Delta\Psi & \beta(s) \sin \Delta\Psi \\ -\frac{(1 + \alpha^2(s)) \sin \Delta\Psi}{\beta(s)} & \cos \Delta\Psi - \alpha(s) \sin \Delta\Psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\Psi + \alpha(s) \sin \Delta\Psi & \beta(s) \sin \Delta\Psi \\ -\gamma(s) \sin \Delta\Psi & \cos \Delta\Psi - \alpha(s) \sin \Delta\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s, s+C) & s(s, s+C) \\ c'(s, s+C) & s'(s, s+C) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Mit  $\mu = \Delta\Psi$  folgt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}} &= \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s) \sin \mu & \beta(s) \sin \mu \\ -\gamma(s) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s) \sin \mu \end{pmatrix} = \cos \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \mu \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \\ &= \cos \mu \underline{\underline{I}} + \sin \mu \underline{\underline{J}} \end{aligned} \quad (6.13)$$

# Die periodische Dispersion

Man nennt die Matrix  $\underline{M}$  auch die Twiss-Matrix oder Eigenmatrix des Beschleunigers. Der Phasen-vorschub nach einem Umlauf ist  $\mu$ . Wie wir aus der Betrachtung der Phasenraumfläche wissen, muss  $\det(\underline{M})=1$  sein. Daher gilt

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha^2 + \beta \cdot \gamma = 1 \quad \underline{J} \cdot \underline{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\underline{I} \quad , \quad \underline{J}^{-1} = -\underline{J} \quad (6.14)$$

Für N Umläufe gilt nun:  $\underline{M}^N = (\cos \mu \underline{I} + \sin \mu \underline{J})^N = \cos N\mu \underline{I} + \sin N\mu \underline{J}$

Die Strahlen im Ring bleiben nun stabil, wenn  $\underline{M}^N$  nicht divergiert. Daher muss  $\mu$  reell bleiben (sonst werden  $\cos$  und  $\sin$  zu  $\cosh$  und  $\sinh$ ). Damit jedoch erhalten wir als Stabilitätsbedingung:

$$|\cos \mu| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |\text{Tr} \underline{M}| = |\cos \mu + \alpha \sin \mu + \cos \mu - \alpha \sin \mu| = |2 \cos \mu| \leq 2$$

Damit muss der Phasenvorschub  $0 \leq \mu \leq \pi$  betragen. Damit können die TWISS Parameter der Ellipse eindeutig festgelegt werden:

$$\underline{M}(s) = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s) \sin \mu & \beta(s) \sin \mu \\ -\gamma(s) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s) \sin \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$
$$\Rightarrow \quad \cos \mu = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) \quad , \quad \beta = \frac{m_{12}}{\sin \mu} \quad , \quad \alpha = \frac{m_{11} - m_{22}}{2 \sin \mu} \quad , \quad \gamma = -\frac{m_{21}}{\sin \mu}$$

# Die periodische Dispersion

Der Phasenvorschub  $\mu$  ist durch die Matrix  $\underline{M}$  festgelegt. Da diese Matrix von Startpunkt  $s$  abhängt, sind die Größen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  Funktionen von  $s$ .  $\mu$  hängt nicht von  $s$  ab! Durch die optischen Funktionen (Twiss-Parameter in Abhängigkeit von  $s$  wird eine Maschinenellipse, die sogenannte Eigenellipse definiert (Courant-Snyder Ellipse).

$$\gamma(s)x^2 + 2\alpha(s)xx' + \beta(s)x'^2 = \varepsilon$$

In einem Ringbeschleuniger ist auch die Dispersionsfunktion  $D(s) = D(s+C)$  und deren Ableitung  $D'(s) = D'(s+C)$  periodisch. Aus den oben gezeigten Lösungen erhält man mit einer speziellen Lösung  $d(s)$  der inhomogenen DGL

$$D(s) = D_0 C(s) + D_0' S(s) + d(s)$$

$$C(s_0) = 1 \quad ; \quad S(s_0) = 0$$

$$C'(s_0) = 0 \quad ; \quad S'(s_0) = 1$$

$D_0$  und  $D_0'$  werden so angepasst, dass die Periodizitätsbedingung erfüllt ist. Man erhält nach einiger Rechnung

$$D(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \frac{\mu}{2}} \cdot \int_s^{s+C} h(\bar{s}) \sqrt{\beta(\bar{s})} \cos\left(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2}\right) d\bar{s}$$

(6.16)

# Die periodische Dispersion

Man erkennt, dass  $D(s)$  immer größer wird, je näher  $\sin \frac{\mu}{2}$  der Null kommt und wird schließlich unendlich groß. Wenn also  $\sin \frac{\mu}{2} = 0 \Rightarrow \mu = 2\pi \cdot N$  und damit ist  $Q$  ganzzahlig, denn

$$Q = \frac{\mu}{2\pi} = N = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{ds}{\beta(s)} \quad (6.17)$$

Wir betrachten die Störung der geschlossenen Gleichgewichtsbahn durch Dipolfeldfehler und mögliche Korrekturen mit Steerer. Ein Dipolfeldfehler  $\delta B$  an der Stelle  $s_0$ , der sich über eine infinitesimal kurze Wegstrecke  $\Delta s$  erstreckt, verursacht eine lokale Störung, die sich in der Form einer Winkeländerung ("Kick")  $\Delta x'$  ggü. dem regulären Ablenkwinkel  $x'$  äußert.

Damit wird die Gleichgewichtsbahn eines Kreisbeschleunigers, der „closed orbit“, den das Sollteilchen bei jedem Umlauf von neuem durchlaufen soll, gestört. Man verwendet daher auch den Begriff „closed orbit distortion“.

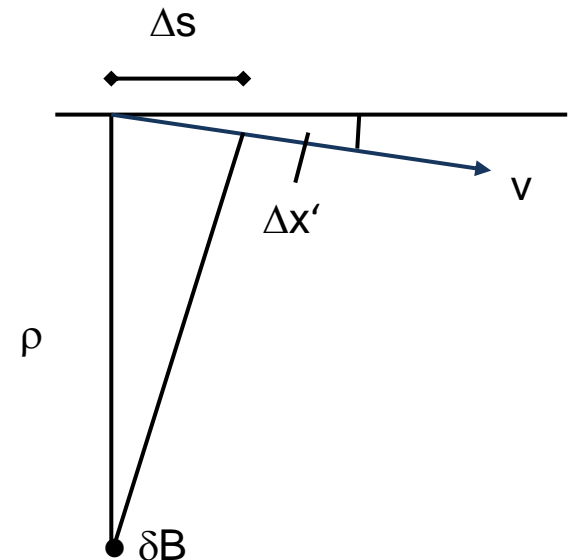
$$m\omega^2 \rho = q\omega\rho \cdot \delta B \Rightarrow \omega = -\frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{q}{m} \delta B, \quad \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

## 4. Feldfehler und Resonanzen

$$\Delta x' = \frac{q}{m} \frac{\Delta s}{v} \delta B \quad , \quad \frac{m \cdot v}{q} = \rho \cdot B$$

mit der magnetischen Steifigkeit des Strahls  $\rho \cdot B$

$$\Delta x' = -\frac{\Delta s}{\rho \cdot B} \delta B = F(s_0) \cdot \Delta s \quad (6.18)$$



Die Gleichgewichtsbahn wird hierdurch modifiziert → "closed orbit distortion"

Wenn eine Störung vorliegt, machen die Teilchen Betatronschwingungen um die gestörte Gleichgewichtsbahn. Die gestörte Gleichgewichtsbahn soll mit  $x_c(s)$  bezeichnet werden. Durch die Transformation nach einem Umlauf und die Periodizitätsbedingung folgt

$$\begin{pmatrix} x_c \\ x'_c - \Delta x' \end{pmatrix} = \underline{M}(s_0) \begin{pmatrix} x_c \\ x'_c \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{M}(s_0) = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha_0 \sin \mu & \beta_0 \sin \mu \\ -\gamma_0 \sin \mu & \cos \mu - \alpha_0 \sin \mu \end{pmatrix}$$

$$\mu = 2\pi \cdot Q$$

$$x_c = (\cos \mu + \alpha_0 \sin \mu) \cdot x_c + \beta_0 \sin \mu \cdot x'_c$$

$$x'_c - \Delta x' = -\gamma_0 \sin \mu \cdot x_c + (\cos \mu - \alpha_0 \sin \mu) \cdot x'_c$$

$$x'_c = \frac{1 - \cos \mu - \alpha_0 \sin \mu}{\beta_0 \sin \mu} x_c \quad \text{und} \quad -\Delta x' = -\gamma_0 \sin \mu \cdot x_c + (\cos \mu - \alpha_0 \sin \mu - 1) \cdot x'_c$$

Setzt man  $x'_c$  in die zweite Gleichung ein dann erhält man nach einigen Umformungen

$$x_c = -\Delta x' \frac{\beta_0 \sin \mu}{2(\cos \mu - 1)} = \Delta x' \frac{\beta_0}{2 \tan \frac{\mu}{2}}$$

$$x_c = \Delta x' \frac{\beta_0}{2 \tan(\pi \cdot Q)}$$

und

$$x'_c = \frac{\Delta x'}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{\tan \frac{\mu}{2}}\right) = \frac{\Delta x'}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0}{\tan(\pi \cdot Q)}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ x'_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \beta_0 \Delta x' \cot(\pi \cdot Q_x) \\ \frac{1}{2} \Delta x' (1 - \alpha_0 \cot(\pi \cdot Q_x)) \end{pmatrix}$$

(6.19)

Damit ist die Amplitude an der Störstelle festgelegt:

$$x_c(s) = a_c \sqrt{\beta_0} \cos[+ Q\pi] \quad \longrightarrow \quad a_c = \frac{\Delta x' \sqrt{\beta_0}}{2 \sin(\pi \cdot Q)}$$

Die allgemeine Orbitfunktion ist dann:  $x_c(s) = \frac{\Delta x' \sqrt{\beta_0}}{2 \sin(\pi \cdot Q)} \sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi(s_0) - Q\pi]$

Die Auswirkungen einer lokalen Störung  $\rightarrow$

$$x_c(s) \propto \Delta x', \quad x_c(s) \propto \sqrt{\beta_0}, \quad x_c(s) \propto \sqrt{\beta(s)}, \quad x_c(s) \propto \frac{1}{\sin(\pi \cdot Q)}$$

Die Zahl Q der Betatronschwingungen pro Umlauf darf nicht in der unmittelbaren Nähe einer ganzen Zahl liegen, ganzzahlige Resonanzen müssen unbedingt vermieden werden. Für ganzzahlige Q liegt die gestörte Gleichgewichtsbahn wegen  $1/\sin(Q\pi)$  im Unendlichen. Dies nennt man auch ein ganzzahliges Stoppband! Die Verallgemeinerung auf viele Störstellen ist

$$x_c(s) = \frac{\sqrt{\beta_0}}{2 \sin(\pi \cdot Q)} \int_s^{s+C} F(\bar{s}) \sqrt{\beta(\bar{s})} \cos[\psi(\bar{s}) - \psi(s) - Q\pi] d\bar{s} \quad (6.20)$$



# Feldfehler und Resonanzen

Dipolfeldfehler werden durch kleine Abweichungen der Magnetfelder vom Sollwert und Ungenauigkeiten in der Positionierung von Ablenkmagneten, Quadrupolmagneten und Sextupolmagneten verursacht.

Vor allem Quadrupolmagnete tragen besonders stark zur Störung bei, wenn die Gleichgewichtsbahn nicht durch die magnetische Mitte der Quadrupolmagnete geht.

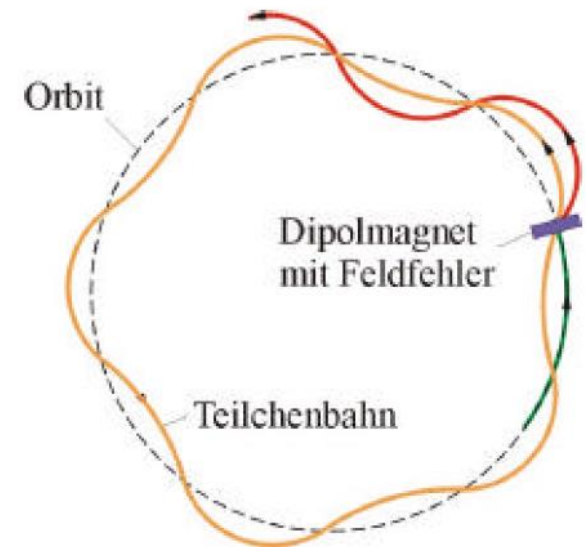
In Fall von ganzzahligen  $Q$  passieren die Teilchen Feldfehler immer mit derselben Phase und die Fehler addieren sich zu großen Amplituden auf.

Eine nicht korrigierte Gleichgewichtsbahn mit großen Abweichungen von der idealen Gleichgewichtsbahn verringert die zur Verfügung stehende Apertur und damit die Akzeptanz der Maschine. Außerdem werden die unerwünschten nichtlinearen Effekte verstärkt.

Ein lokaler Quadrupolfeldfehler oder allgemeiner ein lokaler Gradientenfehler führt zu einer Änderung der Amplitudenfunktion  $\beta(s)$  und der Betatronschwingungszahl  $Q$ .

Die lokalisierte Störung kann durch den Effekt einer dünnen Linse mit der Brechkraft

$$\frac{1}{f} = \delta k \cdot \Delta s$$



$$\underline{M}(s_0) = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ -\gamma_0 \sin \mu_0 & \cos \mu_0 - \alpha_0 \sin \mu_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ -\frac{1}{f} (\cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0) - \gamma_0 \sin \mu_0 & -\frac{\beta_0}{f} \sin \mu_0 + \cos \mu_0 - \alpha_0 \sin \mu_0 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man  $\cos \mu = \frac{1}{2} (\cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0 - \frac{\beta_0}{f} \sin \mu_0 + \cos \mu_0 - \alpha_0 \sin \mu_0)$

$$\cos \mu = \cos \mu_0 - \frac{\beta_0}{2f} \sin \mu_0 \Rightarrow \cos \mu - \cos \mu_0 = -2 \sin \left( \frac{\mu + \mu_0}{2} \right) \sin \left( \frac{\mu - \mu_0}{2} \right) = -\frac{\beta_0}{2f} \sin \mu_0$$

Da  $\mu \sim \mu_0$  folgt  $-2 \sin \mu_0 \sin \left( \frac{\Delta\mu}{2} \right) = -\frac{\beta_0}{2f} \sin \mu_0 \Rightarrow \sin \left( \frac{\Delta\mu}{2} \right) = \frac{\beta_0}{4f}$

Da  $\Delta\mu \ll 1$  ist folgt somit  $\sin \left( \frac{\Delta\mu}{2} \right) \approx \frac{\Delta\mu}{2} = \frac{\beta_0}{4f} \Rightarrow \Delta\mu = \frac{\beta_0}{2f} = 2\pi \Delta Q$

Tune shift

$$\Delta Q = \frac{\beta_0}{4\pi f}$$

(6.21)

Die Gleichung (6.21) wird unter anderem dazu benutzt, die Betatronfunktion  $\beta_0$  im Bereich eines Quadrupols zu messen. Hierzu wird die Brechkraft des Quadrupols ein klein wenig geändert, und die Änderung des Arbeitspunktes  $\Delta Q$  genau gemessen. Die Verallgemeinerung auf die Summe aller Gradientenfehler ergibt für die Änderung des Arbeitspunktes

$$\Delta Q = \frac{1}{4\pi} \oint \beta(\bar{s}) \delta k(\bar{s}) d\bar{s}$$

Die Änderung der Amplitudenfunktion  $\Delta\beta(s)$  findet man unter Berücksichtigung der Periodizitätsbedingung ganz ähnlich wie dies für Dipolfehler skizziert wurde:

$$\Delta\beta(s) = \frac{\beta(s)}{2 \sin(2\pi \cdot Q)} \int_s^{s+C} \delta k(\bar{s}) \beta(\bar{s}) \cos 2[\psi(\bar{s}) - \psi(s) - Q\pi] d\bar{s}$$

Wenn  $|\cos \mu_0|$  nahe bei Eins liegt, kann  $|\cos \mu|$  aufgrund der Störung größer als Eins werden, und die Betatronschwingungen werden instabil. Es gibt ein Intervall  $\delta Q$  in der Umgebung von halb- und ganzzahligen  $Q$ -Werten, in dem der Beschleuniger aufgrund von Gradientenfehlern instabil wird.

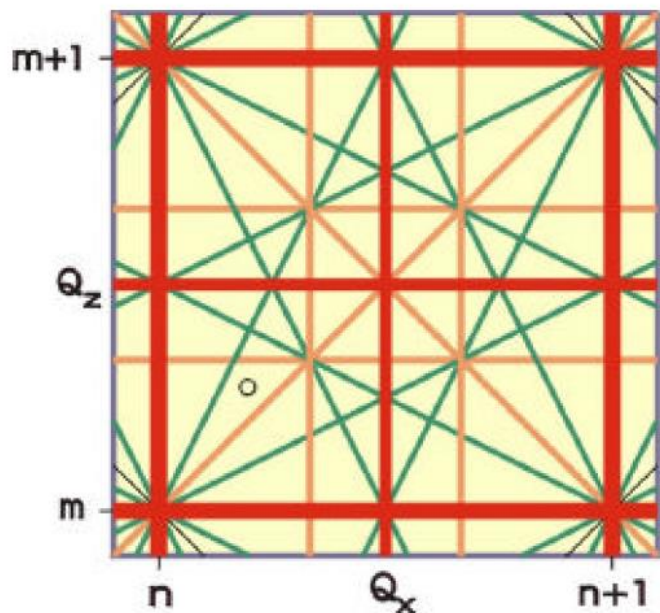
→ **Stoppband 2. Ordnung**

Die Störung verursacht einen tune shift, eine Verlagerung des Arbeitspunktes!

# Feldfehler und Resonanzen

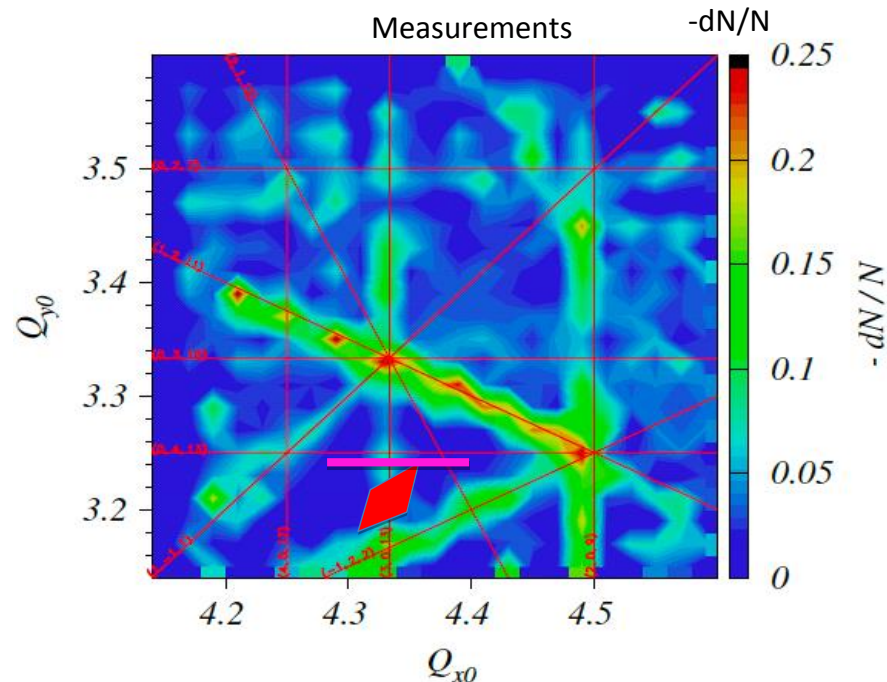
Wenn nun der Arbeitspunkt in der Nähe eines Stoppbandes zweiter Ordnung ( $Q = \text{halbzahlig}$ ) liegt, dann liegt der Phasenvorschub  $\mu_0$  pro Umlauf in der Nähe von  $\pi$ , und es besteht die Möglichkeit der Resonanz.

Man kann dann ein entsprechendes Tune-Diagramm erstellen mit den Resonanzen verschiedener Ordnung:



$Q_x$ - $Q_z$ -Diagramm bis zur 3. Ordnung

$$m \cdot Q_x + n \cdot Q_z = p \quad (m, n, p = \text{ganze Zahlen})$$



G. Franchetti et al., GSI-Acc-Note-2005-02-001

Feldfehler	optische Resonanz
Dipolfehler	$Q = n$
Quadrupolfehler	$Q = n + 1/2$
Sextupolfehler	$Q = n + 1/3$
Oktupolfehler	$Q = n + 1/4$
usw.	usw.

## 5. Chromatizität

Teilchen mit einer Impulsabweichung  $\delta = \Delta p/p_0$  erfahren eine unterschiedliche Fokussierstärke. Die Auswirkung dieses Effektes auf die Zahl der Betatronschwingungen ( $Q$ ) pro Umlauf wird durch die Chromatizität  $\xi$  erfasst.

$$\Delta Q_x = \xi_x \frac{\Delta p}{p_0} \quad , \quad \Delta Q_y = \xi_y \frac{\Delta p}{p_0} \quad (6.22)$$

Bei der Berechnung der Chromatizität unterscheidet man zwischen der natürlichen Chromatizität  $\xi^n$  und der durch Sextupolfelder ausgelösten Chromatizität  $\xi^s$ . Die Fokussierstärke  $K(s)$  in der Hill'schen Differenzialgleichung ist umgekehrt proportional zu dem Impuls der Teilchen.

$$\Delta K_x = -K_x \frac{\Delta p}{p_0} \quad (6.23)$$

Die Änderung des Arbeitspunktes aufgrund von Quadrupolfehlern haben wir erhalten aus

$$\Delta Q = \frac{1}{4\pi} \oint \beta(\bar{s}) \Delta K_x d\bar{s} = \underbrace{-\frac{1}{4\pi} \oint \beta(\bar{s}) K_x(\bar{s}) d\bar{s}}_{\xi_x^n} \cdot \frac{\Delta p}{p_0} \quad (6.24)$$

Damit erhalten wir für die natürliche Chromatizität:

$$\xi_x^n = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(\bar{s}) K_x(\bar{s}) d\bar{s} \quad , \quad \xi_y^n = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(\bar{s}) K_y(\bar{s}) d\bar{s}$$

Da die Fokussierungsstärken  $K_x$  und  $K_y$  umgekehrt proportional zu dem Impuls  $p$  sind, ist die natürliche Chromatizität immer negativ. Der Betrag der Chromatizität nimmt mit der Stärke der Fokussierung zu. Besonders große Beiträge kommen aus dem Bereich von fokussierenden Quadrupolen, wo sowohl die Betatronfunktion wie die Fokussierungsstärke groß sind.

Eine zusätzliche Chromatizität entsteht durch Sextupolfelder, wenn die Dispersion  $D$  von null verschieden ist. Für die Sextupolfelder gilt

$$B_y(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) x^2 = \frac{g_s}{2} x^2$$

Ein Teilchen mit der Ortsabweichung  $x = D \frac{\Delta p}{p_0}$  spürt den Gradienten des Sextupolfeldes

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} \approx \left( \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) x = g_s x \quad \text{und damit} \quad \Delta K_x^s = \frac{q}{p} \frac{\partial B_y}{\partial x} \approx \frac{g_s x}{B \cdot \rho} = \frac{g_s D}{B \cdot \rho} \frac{\Delta p}{p_0}$$

Die Wirkung des Sextupols hängt daher in diesem Fall von der Dispersion ab. Mit (6.24) folgt

$$\Delta Q = \frac{1}{4\pi} \oint g_s(\bar{s}) \frac{\beta_x(\bar{s}) D(\bar{s})}{B \cdot \rho} d\bar{s} \cdot \frac{\Delta p}{p_0} = \xi_x^s \cdot \frac{\Delta p}{p_0} \quad (6.25)$$

Natürliche Quellen von Sextupolfeldern sind die Dipolmagnete. Vor allem bei niedrigen Erregungen verursacht das remanente Feld starke Sextupolkomponenten. Die Gesamtchromatizität ist die Summe

$$\xi_x = \xi_x^n + \xi_x^s$$

Um die natürliche Chromatizität unterschiedlich großer Maschinen miteinander vergleichen zu können, wird manchmal auch die relative natürliche Chromatizität definiert

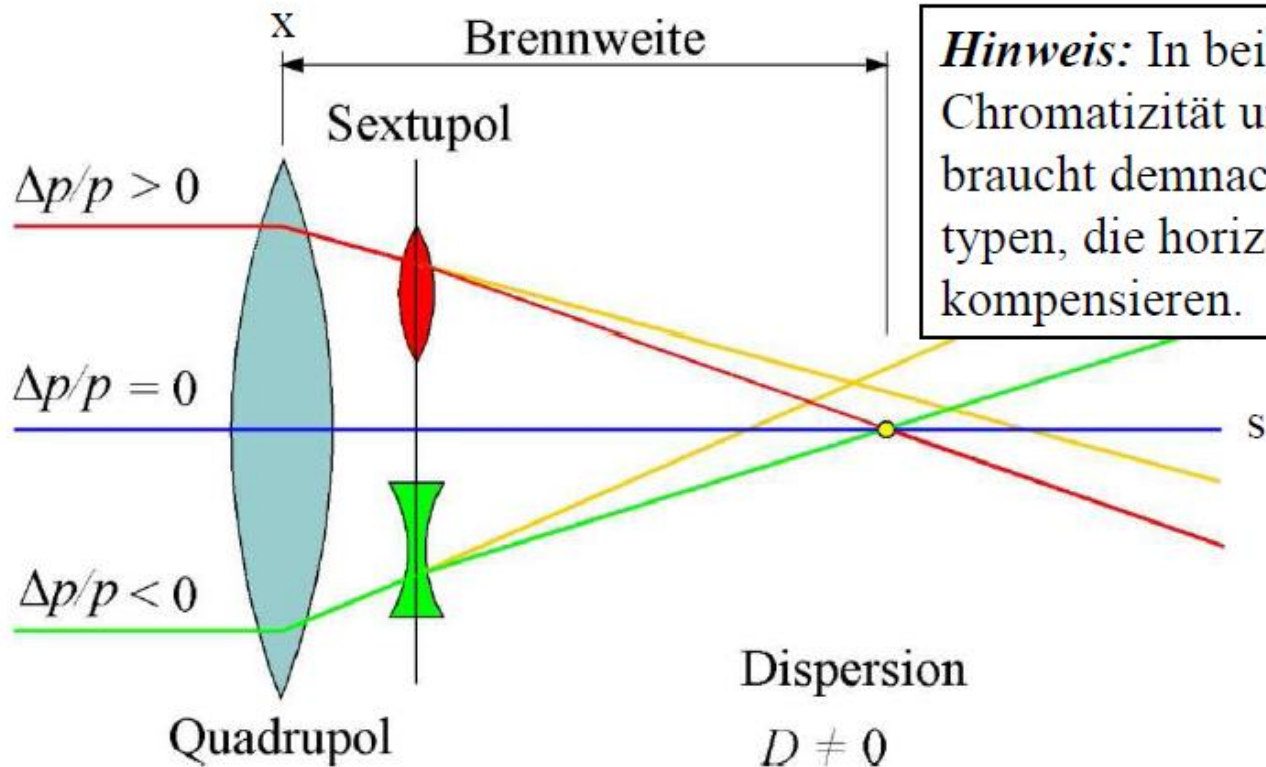
$$\frac{\Delta Q}{Q} = \xi_{rel}^n \frac{\Delta p}{p_0}$$

Die meisten Maschinen mit starker Fokussierung haben eine relative natürliche Chromatizität im Bereich von -1 und -1.5.

Zur Korrektur der natürlichen Chromatizitäten und der durch störende Sextupolfelder ausgelösten Chromatizitäten werden gezielt Korrektursextopole eingesetzt.

Die Größen  $\xi_x^s$  und  $\xi_y^s$  werden mithilfe der Korrektursextopole so modifiziert, dass nach der

Korrektur  $\xi_x \approx 0$  und  $\xi_y \approx 0$  sind.



*Hinweis:* In beiden Ebenen ist die Chromatizität unterschiedlich. Man braucht demnach zwei Sextupoltypen, die horizontal bzw. vertikal kompensieren.

218

Im Prinzip reichen zwei Sextupole zur Korrektur, jedoch schränkt dies die dynamische Apertur des Ringes deutlich ein. Eine Korrektur der Chromatizität ist in der Regel stets erforderlich, da sonst die Bandbreiten des Arbeitspunktes ("tune spread"), d. h.  $\Delta Q_x$  und  $\Delta Q_y$  aufgrund der Impulsunschärfe  $\Delta p/p_0$  zu groß werden. Die zur Korrektur der Chromatizität notwendigen Sextupolmagnete haben den Nachteil, dass sie nichtlineare Resonanzen dritter Ordnung anfangen.