

Kapitel 4

Bauelemente im Beschleunigerbau

1. Bauelemente im Beschleuniger

In diesem Abschnitt werden wesentliche Komponenten der Kreisbeschleuniger, nämlich die Elektromagnete zur Strahlmanipulation behandelt. Dazu zählen **Ablenkmagnete, Quadrupolmagnete und Sextupolmagnete** etc.

Die normalleitenden Magnete werden aus Weicheisen und normalleitenden Spulen aufgebaut. Weicheisen ist ein kohlenstoffarmer Stahl mit einem hohen Sättigungsfeld, geringer Remanenz und geringer Koerzitivkraft.

Warum verwendet man Magnete bei Kreisbeschleunigern? Für die Ablenkung von Teilchen gilt allgemein die Lorentzkraft

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Bei relativistischen Geschwindigkeiten haben ein elektrisches Feld E und ein Magnetfeld B die gleiche Kraftwirkung wenn $E = c \cdot B$. Das bedeutet

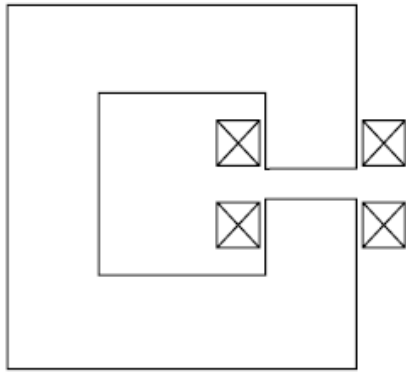
$$B = 1 \text{ T} \quad \longrightarrow \quad E = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ T} = 3 \cdot 10^8 \text{ V/m}$$

Dies würde extreme elektrische Felder bedeuten, daher werden fast ausschließlich magnetische Felder zur Strahlmodifikation und –ablenkung verwendet.

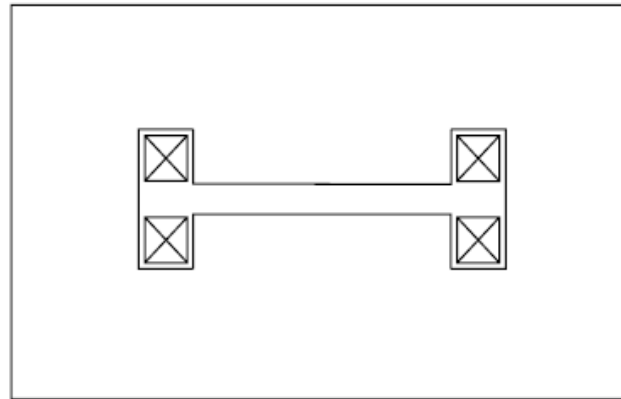
Man unterscheidet Ablenkmagnete mit einem homogenen Magnetfeld und Ablenkmagnete mit einem Feldgradienten. Ablenkmagnete mit Feldgradienten haben auf den Strahl eine fokussierende Wirkung.

Ablenkmagnete

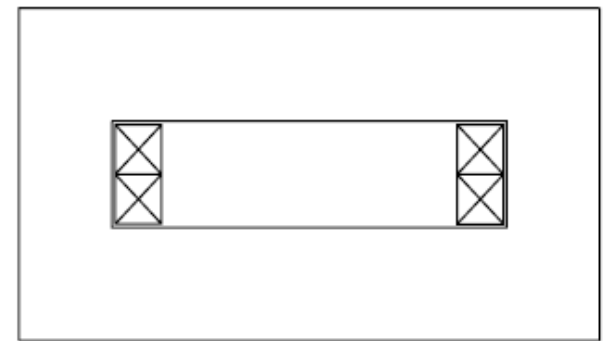
Ablenkmagnete mit einem homogenen Magnetfeld werden häufig Dipolmagnete genannt. Typische Bauformen sind der **C-Magnet**, der **H-Magnet** und der **Window-Frame-Magnet**.



C-Magnet



H-Magnet



Window-Frame Magnet

Diese Bezeichnungen ergeben sich aus den unterschiedlichen Querschnittsgeometrien der Magnete. Der C-Magnet hat den Vorteil, dass er von einer Seite offen ist, womit der Ein- und Ausbau einer Vakuumkammer einfach möglich ist. Ein Nachteil ist die fehlende Symmetrie, was zu größeren Feldfehlern führen kann.



Ein C-Magnet von DELTA



Ein Dipolmagnet im SIS18

Ablenkmagnete

Grundlage der Berechnung von Strahlführungsmagneten ist die Maxwellsche Gleichung der Magnetostatik:

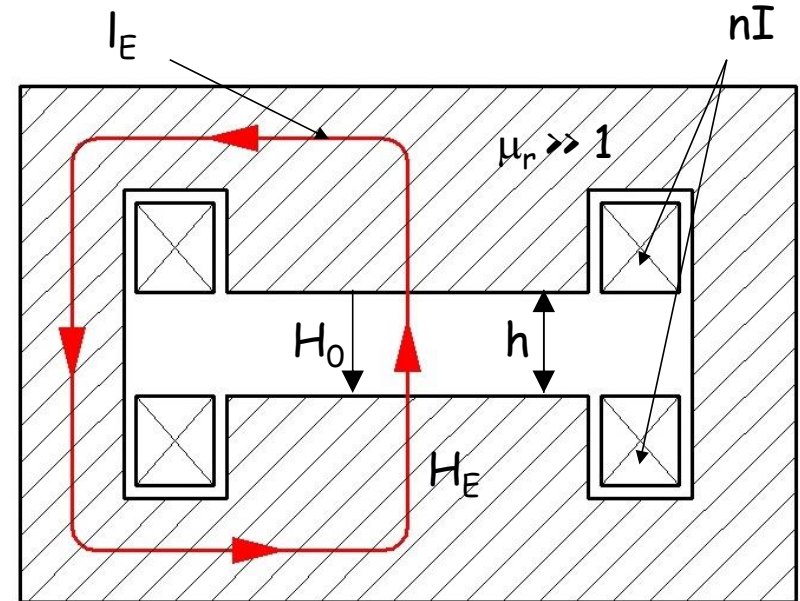
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_E l_E + H_0 h = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = n \cdot I$$

Dabei ist H_E das magnetische Feld im Eisen, H_0 das Feld im Spalt und I der Strom der durch die Spule mit der Windungszahl n fließt.

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{B_0}{\mu_0 \mu_{rEisen}} l_E + \frac{B_0}{\mu_0} h = n \cdot I$$

damit erhält man

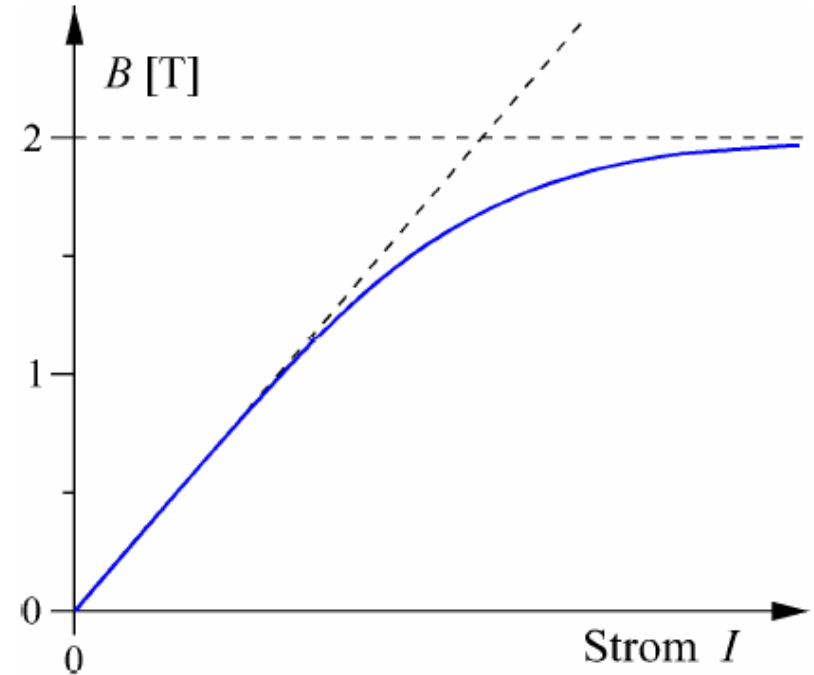
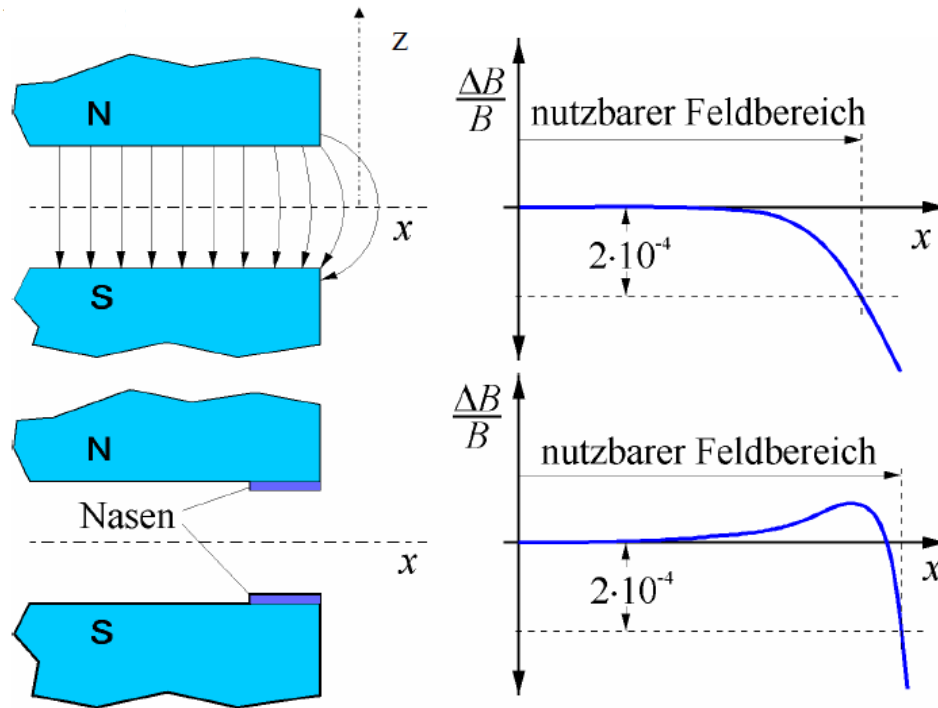
$$B_0 = \mu_0 \frac{n \cdot I}{\left(\frac{l_E}{\mu_r} + h \right)} \quad \text{oder mit} \quad \mu_r \gg 1 \quad \longrightarrow \quad B_0 = \mu_0 \frac{n \cdot I}{h} \quad (4.1)$$



Ablenkmagnete

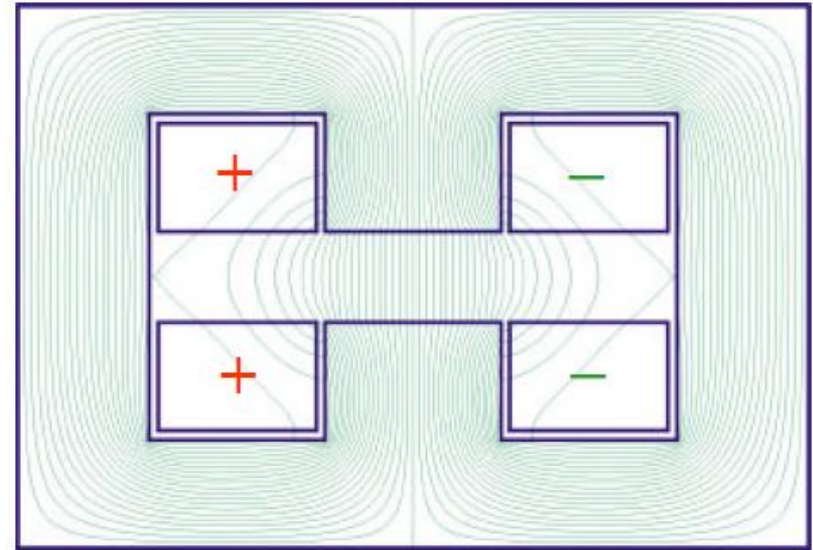
Bei höheren Erregungen setzt eine Sättigung des Eisens ein und begrenzt das Feld $B = B(I)$ bei etwa $B \gg 2 \text{ T}$ (nutzbar: $B \gg 1,5 \text{ T}$).

Das heißt auch bei Erhöhen des Erregungsstroms wird das Magnetfeld nur noch unwesentlich zunehmen.

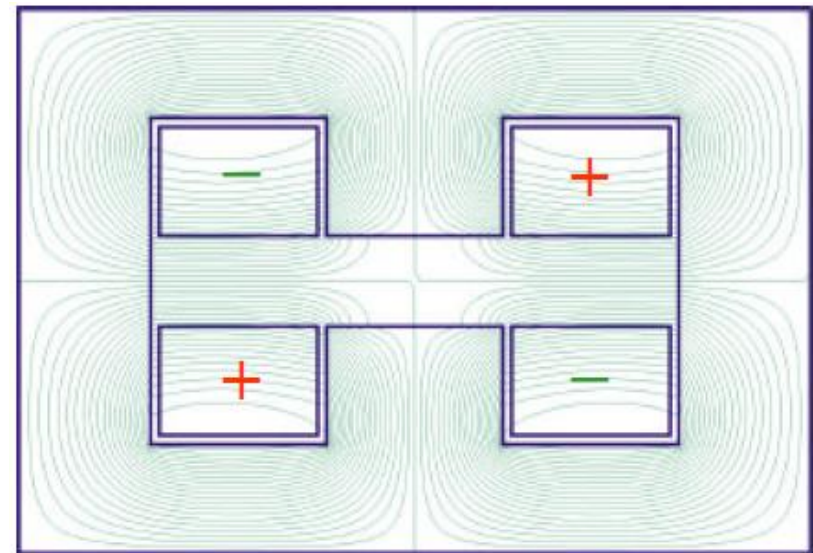


Der nutzbare Feldbereich kann am Rand des Magneten durch Anbringen von Nasen, sogenannten „Shims“ oder Shuntplatten erweitert werden.

Die symmetrische Anordnung der Spulenerregung erzeugt das gewünschte homogene Dipolfeld:



Die antimetrische Anordnung liefert aber einen „gedrehten Quadrupol“ (skew quad), ein horizontal von dem Orbit abweichender Strahl wird vertikal abgelenkt. Es ergibt sich eine starke Koppelung der horizontalen und vertikalen Phasenräume.



2. Quadrupolmagnete

Um die Raumladungskräfte aufgrund der gleichnamigen Ladungen der Teilchen im Strahl zu kompensieren, sind Elemente erforderlich, welche die Teilchen zurück zur Strahlachse lenken. Dazu ist ein azimuthales Magnetfeld erforderlich, damit die Lorentzkraft diese Ablenkung vornehmen kann.

Wie in der linearen Optik, setzt dies ein lineares Anwachsen der fokussierenden Kraft mit dem Radius voraus:

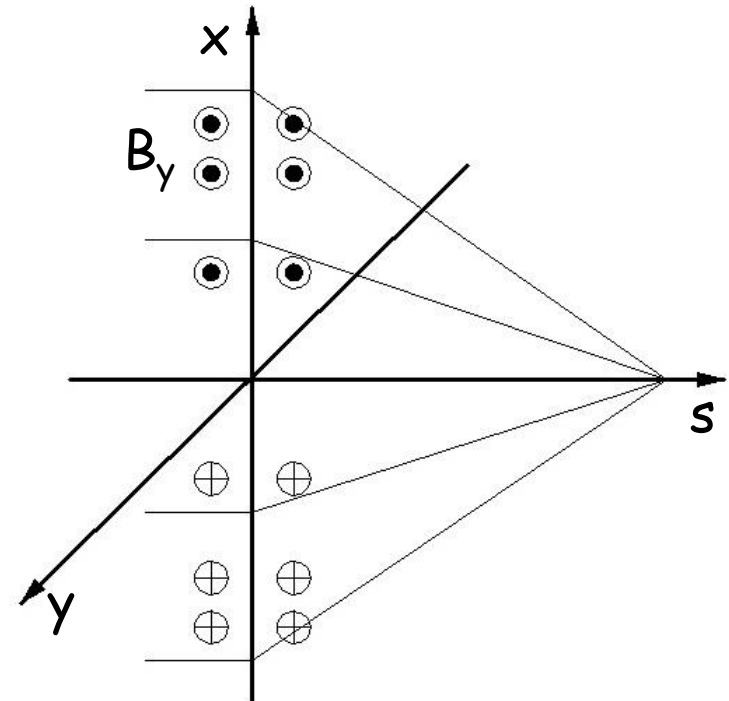
$$B_y = B' \cdot x \quad \text{mit} \quad B' = g = \text{const.}$$

mit dem Gradienten g .

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \quad \text{folgt} \quad \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_s \\ \partial_x & \partial_y & \partial_s \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} =$$
$$-\partial_s B_y \vec{e}_x + \partial_s B_x \vec{e}_y + (\partial_x B_y - \partial_y B_x) \vec{e}_s = 0$$

Und damit der Feldverlauf in die x-Richtung:

$$B_x = B'y$$
$$B_y = B'x$$



Quadrupolmagnete

Die Geometrie des magnetischen Feldes erhält man nun aus der Betrachtung der Richtung der Feldlinien. Diese ergibt sich zu

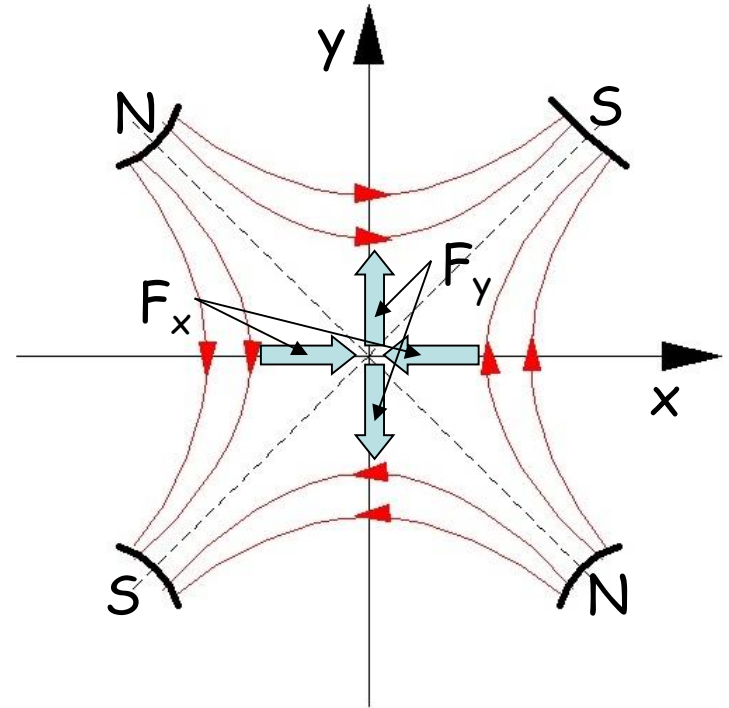
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} = \frac{B' \cdot x}{B' \cdot y} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \int y dy = \int x dx \Rightarrow y^2 = x^2 + c \Leftrightarrow y^2 - x^2 = c$$

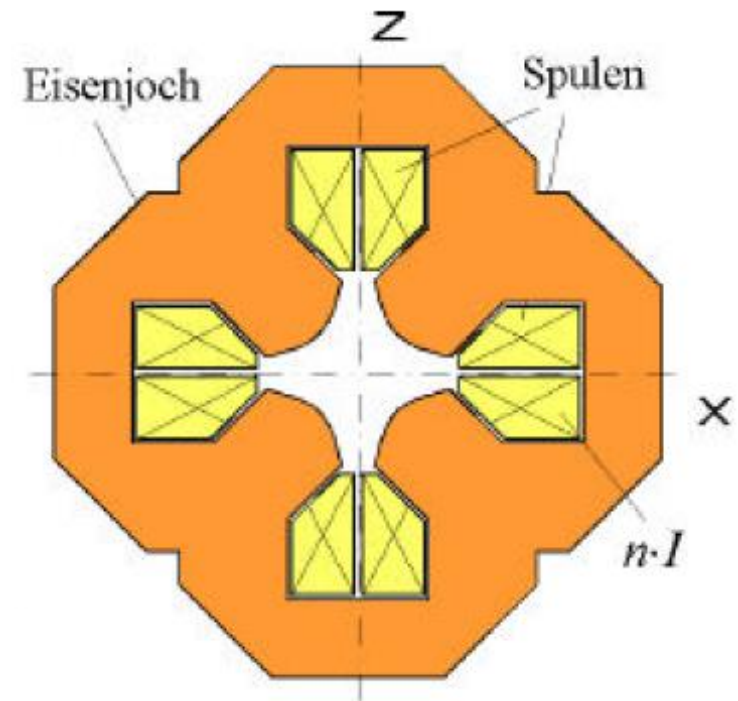
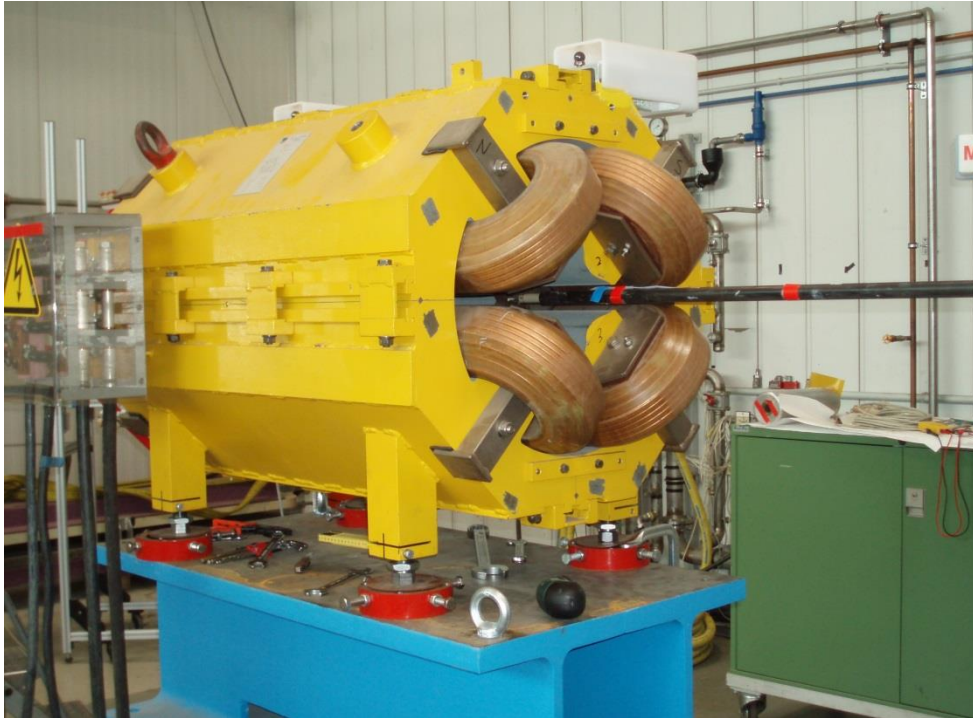
Dies sind Hyperbeln mit unter 45° geneigten Geraden als Asymptoten (siehe Bild). Dies ein Quadrupolfeld. Man sieht, dass dieses Feld zwar in x-Richtung fokussiert, wie gefordert, in y-Richtung aber defokussiert. Geeignete Polschuhflächen zur Erzeugung eines solchen Feldes sind dessen Orthogonaltrajektorien

$$-\frac{1}{y'} = \frac{B_y}{B_x} = \frac{x}{y} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{B'x}{B'y} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln x + \ln y = const \Rightarrow x \cdot y = c$$

Die Polschuhe folgen daher auch einer Hyperbelfunktion $y(x) = \frac{c}{x}$



Quadrupolmagnete



Hier sind ein Beispiel für einen solchen Quadrupol und der schematische Aufbau dargestellt.

Konventionelle Quadrupolmagnete bestehen aus einem Eisenjoch und vier Polschuhen mit einer annähernd hyperbelförmigen Oberfläche. Die Erregung geschieht mit wassergekühlten Kupferspulen, die um die Polschuhe gewickelt sind. In Wirklichkeit hat der Polschuh in der Umgebung der Polspitze nur angenähert die Form einer Hyperbel. Die Abweichung von der idealen Hyperbel macht sich in Multipolkomponenten höherer Ordnung bemerkbar. Aus der Symmetrie der Anordnung sind allerdings nur Multipolanteile mit einer relativ hohen Ordnung (12-Pol, 20-Pol, etc.) möglich.

Quadrupolmagnete

Nun kann der Gradient über den geschlossenen Integrationsweg ermittelt werden:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = n \cdot I$$

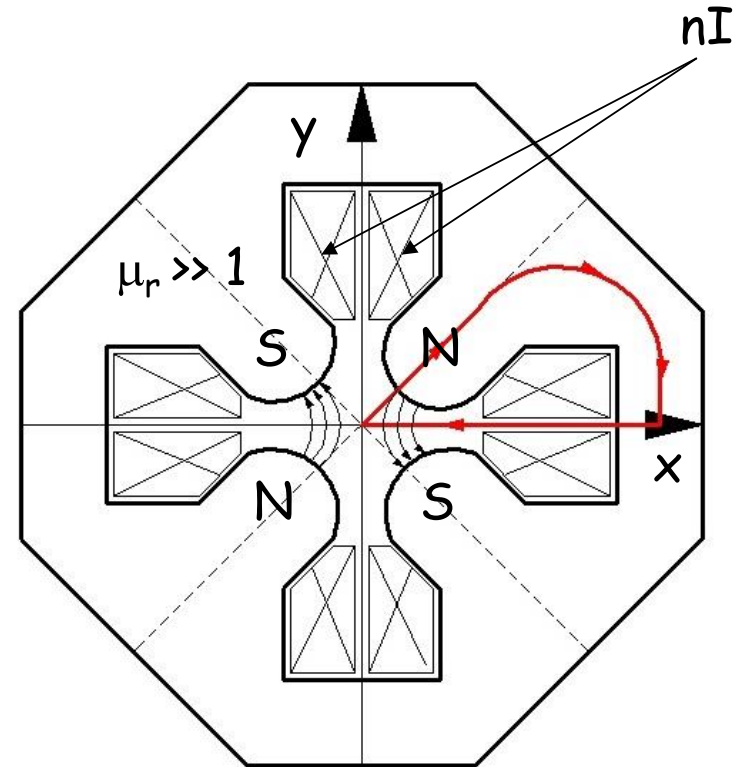
Der Betrag der magnetischen Induktion im eisenfreien Raum entlang der Asymptote ist:

$$B_0 = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B' \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow H = \frac{B'}{\mu_0} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Der wesentliche Beitrag zum Umlaufintegral liefert nur das kurze Stück entlang der Asymptote von der Achse bis zum Polschuhradius R , da das H-Feld im Eisen aufgrund von $m_r \ll 1$ sehr klein ist.

$$H = \frac{B'}{\mu_0} r \Rightarrow \int_0^R \frac{B'}{\mu_0} r dr = \frac{B'}{\mu_0} \frac{R^2}{2} = nI \Rightarrow B' = g = \frac{2\mu_0}{R^2} nI \quad (4.2)$$

Da der Gradient proportional zu $1/R^2$ ist, macht es Sinn einen möglichst kleinen Polabstand zu wählen, um den Strom I und damit den Leistungsbedarf des Magneten zu reduzieren.



Sextupolmagnete

Dabei ist $\Phi(x, y) = \mu_r \mu_0 \phi(x, y)$ und $\nabla \vec{B} = 0 \Rightarrow \Delta \Phi(x, y) = 0$ (Laplacegleichung)

Nun kann man einen Separationsansatz machen (analytische Fortsetzung in die komplexe Ebene)

$$B_y(x, y) = G_y(x) + f(y) \quad \text{mit} \quad G_y(x) = B_y(x, 0)$$

$$\longrightarrow \quad \Phi(x, y) = G_y(x) \cdot y + \int f(y) dy$$

Aus der Laplacegleichung erhält man

$$\Delta \Phi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = y \frac{\partial^2 G_y(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial f(y)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(y)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 G_y(x)}{\partial x^2} y$$

Damit erhält man $f(y)$ durch Integration: $f(y) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_y(x)}{\partial x^2} y^2$

$$\Phi(x, y) = G_y(x) \cdot y - \frac{1}{6} \frac{\partial^2 G_y(x)}{\partial x^2} y^3 \quad (4.3)$$

Damit erhält man das Magnetfeld durch Ableiten der Potentialfunktion

$$\longrightarrow \vec{B}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{d\Phi(x, y)}{dx} \\ \frac{d\Phi(x, y)}{dy} \end{pmatrix}$$

Für den Sextupol gilt der quadratische Verlauf $B_y(x, 0) = G_y(x) = \frac{1}{2} g' x^2$ mit $g' = \frac{\partial^2 B_y(x, 0)}{\partial x^2}$

$$f(y) = -\frac{1}{2} g' y^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{2} g' x^2 \cdot y - \frac{1}{6} g' y^3$$

$$\longrightarrow \vec{B}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{d\Phi(x, y)}{dx} \\ \frac{d\Phi(x, y)}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g' x \cdot y \\ \frac{g'}{2} (x^2 - y^2) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Durch einen Integrationspfad, ähnlich wie beim Quadrupol erhält man für g' :

$$g' = \frac{\partial^2 B_y(x, 0)}{\partial x^2} = 6\mu_0 \frac{n \cdot I}{R^3} \quad (4.5)$$

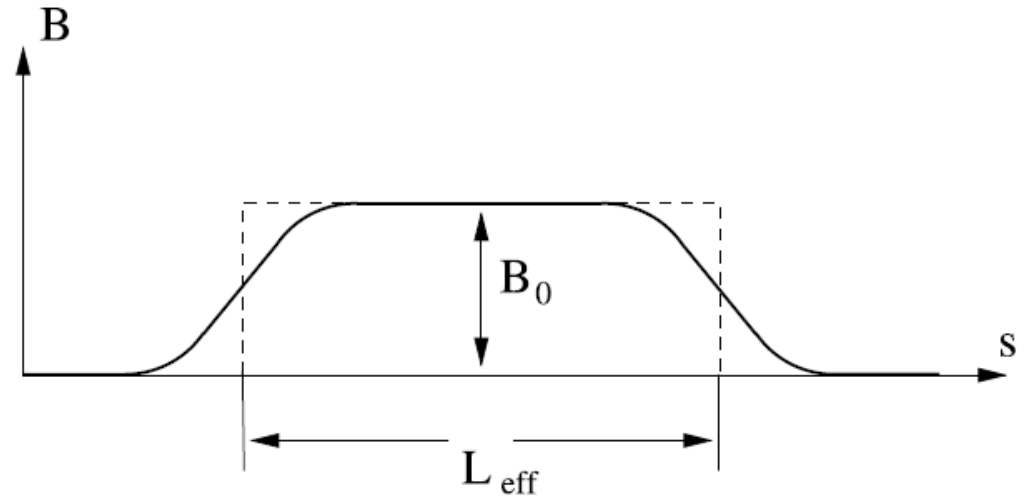
4. Randfelder

Wenn man die Stärke eines Magnetfeldes längs der Sollbahn als Funktion des Weges s aufträgt, dann erhält man eine Verteilungsfunktion wie sie unten dargestellt ist. Das Magnetfeld geht am Rand des Magneten nicht plötzlich auf null. Das sogenannte Randfeld erstreckt sich bis weit in den Außenbereich. Die Reichweite liegt bei einem Ablenkmagneten in der Größenordnung von mehreren Spaltbreiten g , bei einem Quadrupol in der Größenordnung mehrerer Aperturradien a . Die effektive Länge L_{eff} erhalten wir aus dem Integral über die gemessene Verteilungsfunktion.

Für den Dipol gilt
$$L_{eff} = \frac{1}{B_0} \int_{-\infty}^{\infty} B(s) ds$$

Analog für Quad und Sextupol:

$$L_{eff} = \frac{1}{g_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) ds \quad L_{eff} = \frac{1}{g_{s0}} \int_{-\infty}^{\infty} g_s(s) ds$$



Als Faustformel gilt für den Zusammenhang zwischen der mechanischen Eisenlänge L_{Fe} und der effektiven Länge L_{eff}

Dipol:
$$L_{eff} = L_{Fe} + 1.3g$$

Quadrupol:
$$L_{eff} = L_{Fe} + a$$

Sextupol:
$$L_{eff} = L_{Fe} + \frac{a}{2}$$

Wobei g die Spaltbreite des Dipols und a der Aperturradius des Multipols sind.

5. Supraleitende Magnete

Benötigt man Magnetfeldstärken deutlich über 2 T, dann kann wegen der Sättigung des Eisens kein Eisenmagnet verwendet werden. Nimmt man einen Kupferleiter mit 30 mm Durchmesser und möchte man $B = 5T$ Feld in 50 mm Entfernung erzeugen so benötigt man einen Strom von $I = 1.25 \cdot 10^6$ A. Das wären dann 1700 A/mm^2 . Dies ist nur mit einem Supraleiter möglich.

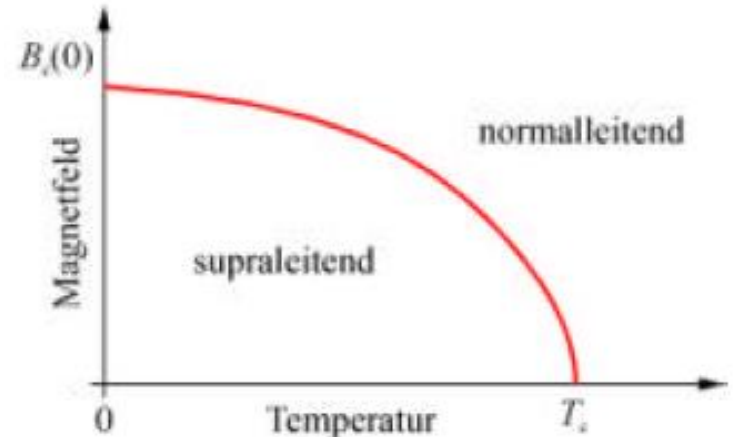
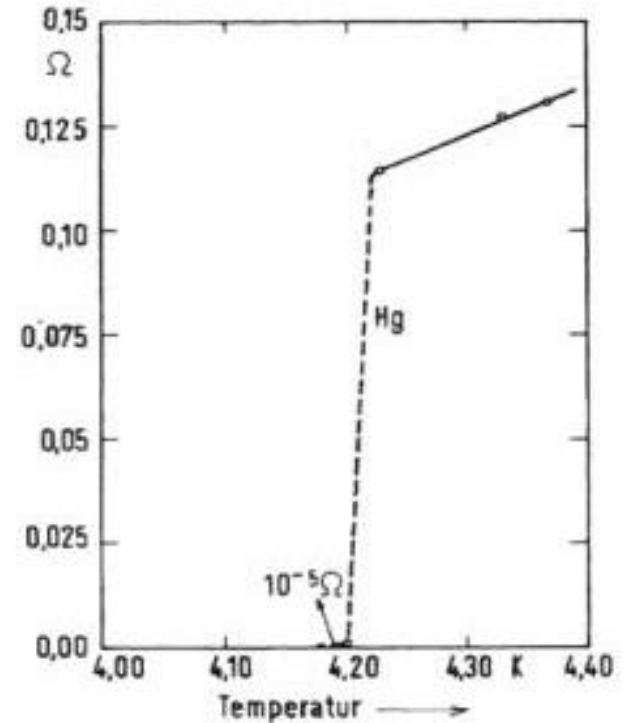
Supraleitung wurde 1911 von H Kamerling Onnes entdeckt bei Quecksilber.

Die Supraleitung hängt neben der Temperatur auch von dem Magnetfeld ab. Die Grenzfeldstärke ist in guter Näherung

$$B_c(T) = B_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

Auf Grund des Meissner-Ochsenfeld-Effektes wird das Magnetfeld aus dem Supraleiter verdrängt.

Daher fließt auch der Strom nur an der Oberfläche mit einer Eindringtiefe von wenigen nm.



Supraleitende Magnete

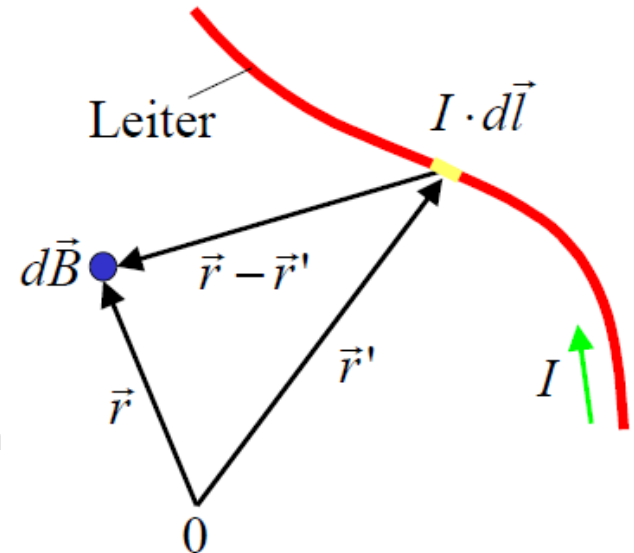
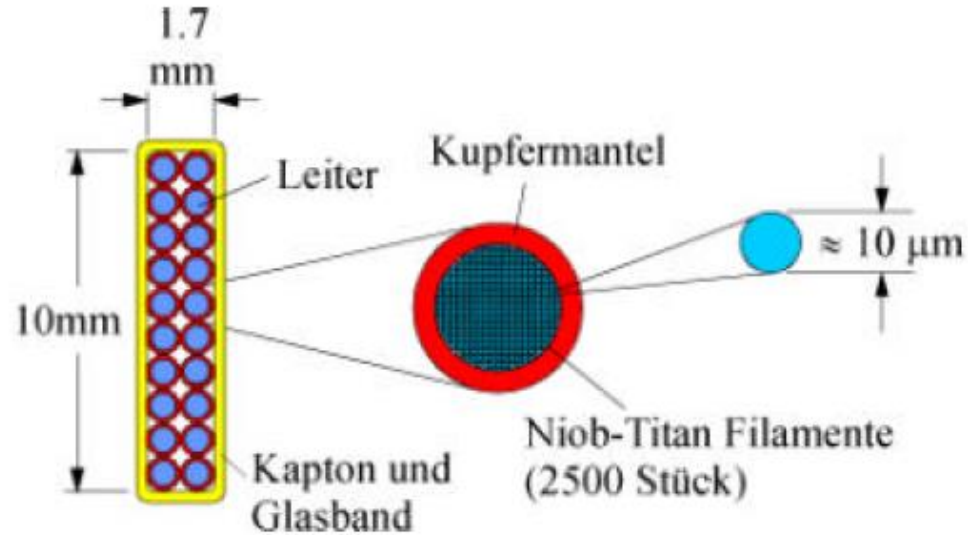
Auf den Leiteroberflächen gibt es daher extrem hohe Stromdichten und Feldstärken, die zum "Quenchen" führen können. Der Leiter wird daher aus vielen dünnen Filamenten aufgebaut, um große Oberflächen zu haben.

Bei diesen Magneten ist die Feldverteilung vollständig durch die Spulenanordnung, genauer gesagt die Stromdichteverteilung bestimmt. Die Spulen müssen daher mit einer sehr großen Genauigkeit gewickelt werden, um Feldstörungen zu reduzieren.

Bei supraleitenden Magneten wird die Feldverteilung nur durch die räumliche Anordnung der Leiter erzeugt. Zur Berechnung benutzt man das **Biot-Savart** Gesetz.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Bei supraleitenden Magneten wird die Feldkonfiguration durch eine große Zahl von Einzelleitern erzeugt, die entlang eines Zylinders verlaufen.



Supraleitende Magnete

Wir nehmen allgemein an, dass die Stromfäden parallel zur Strahlachse laufen. P ist ein Aufpunkt in der x,y-Ebene. Q der Punkt, wo der Stromfaden die Ebene durchstößt. Es gilt

$$\vec{R} = \vec{a} - \vec{r}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Da nur B-Feldkomponenten in x- oder y-Richtung vorliegen gilt

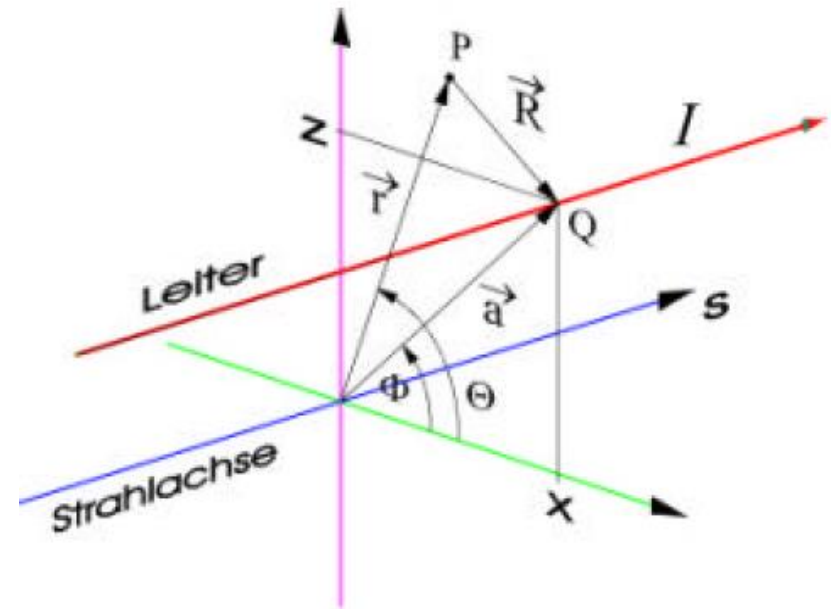
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_s \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_y A_s \\ -\partial_x A_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ für das Magnetfeld eines Stromfadens gilt, folgt $A_s(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(R)$

Wir wollen dies nun auf die Strahlachse beziehen: $R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\Phi - \Theta)$

Mit $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ erhalten wir daraus

$$R = a \left[1 + \frac{r^2}{a^2} - \frac{r}{a} (e^{i(\Phi-\Theta)} + e^{-i(\Phi-\Theta)}) \right]^{1/2} = a \left[\left(1 - \frac{r}{a} e^{i(\Phi-\Theta)} \right) \left(1 - \frac{r}{a} e^{-i(\Phi-\Theta)} \right) \right]^{1/2}$$



$$\Rightarrow \ln R = \ln a + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r}{a} e^{i(\Phi - \Theta)} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r}{a} e^{-i(\Phi - \Theta)} \right)$$

Mit der Entwicklung $\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ erhalten wir

$$\Rightarrow \ln R = \ln a - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n \left(e^{in(\Phi - \Theta)} + e^{-in(\Phi - \Theta)} \right) = \ln a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos(n(\Phi - \Theta))$$

Damit erhält man das Vektorpotential in Zylinderkoordinaten:

$$A_s(r, \Theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos(n(\Phi - \Theta))$$

Da der konstante Term $\ln(a)$ und auch das Vorzeichen des Ausdrucks von $\ln(R)$ des Vektorpotentials nicht zum B-Feld beitragen, können diese weggelassen werden (Eichung). Wir wollen nun die Feldkonfiguration einer Stromleiteranordnung ermitteln, die auf einem Zylinder verteilt ist, dessen Achse mit der Strahlachse übereinstimmt.

Ein Stromfaden hat den Wert $dI(\Phi) = I_0 \cos(m\Phi) d\Phi$ mit $m = 1, 2, 3, \dots$

$$dI(\Phi) \rightarrow dA_s(r, \Theta) \Rightarrow A_s(r, \Theta) = \int_0^{2\pi} dA_s(r, \Theta)$$

$$A_s(r, \Theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{n 2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n(\Phi - \Theta)) \cos(m\Phi) d\Phi$$

$$\begin{aligned} \cos(n(\Phi - \Theta)) \cos(m\Phi) &= \cos(n\Phi) \cos(n\Theta) \cos(m\Phi) \\ &+ \sin(n\Phi) \sin(n\Theta) \cos(m\Phi) \end{aligned}$$

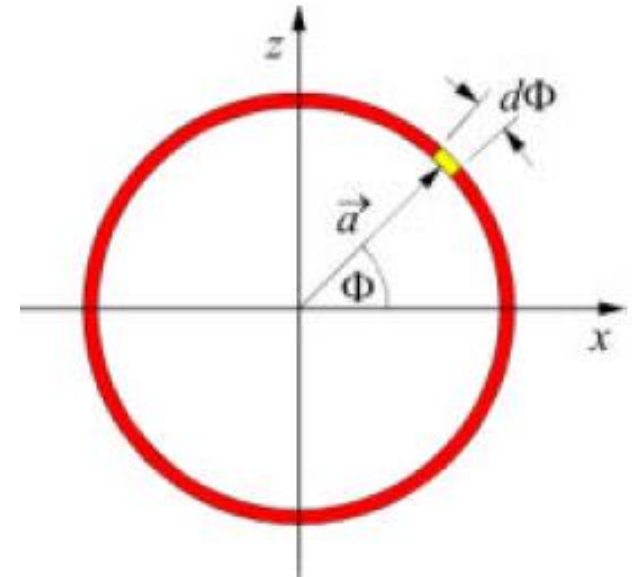
$$\int_0^{2\pi} \sin(n\Phi) \cos(m\Phi) d\Phi = 0 \quad ,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\Phi) \cos(m\Phi) d\Phi = \begin{cases} \pi & \text{wenn } n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\longrightarrow A_s(r, \Theta) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{a}\right)^m \cos(m\Theta) \quad (4.6)$$

Für das Magnetfeld erhalten wir daher

$$\vec{B}(r, \Theta) = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_s}{\partial \Theta} \\ -\frac{\partial A_s}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\mu_0 I}{2a} \left(\frac{r}{a}\right)^{m-1} \begin{pmatrix} \sin(m\Theta) \\ \cos(m\Theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$



Supraleitende Magnete

Die folgenden Stromverteilungen sind notwendig, um reine Dipol-, Quadrupol- bzw. Sextupolfelder zu erhalten:

Dipol: $m = 1, I(\Phi) = I_0 \cos \Phi$

Quadrupol: $m = 2, I(\Phi) = I_0 \cos 2\Phi$

Sextupol: $m = 3, I(\Phi) = I_0 \cos 3\Phi$

Beispiel eines Dipols $m = 1, B_z = \text{const}$

