

Kapitel 3

Emittanz- und Phasenraumkonzept

1. Phasenraumbetrachtung

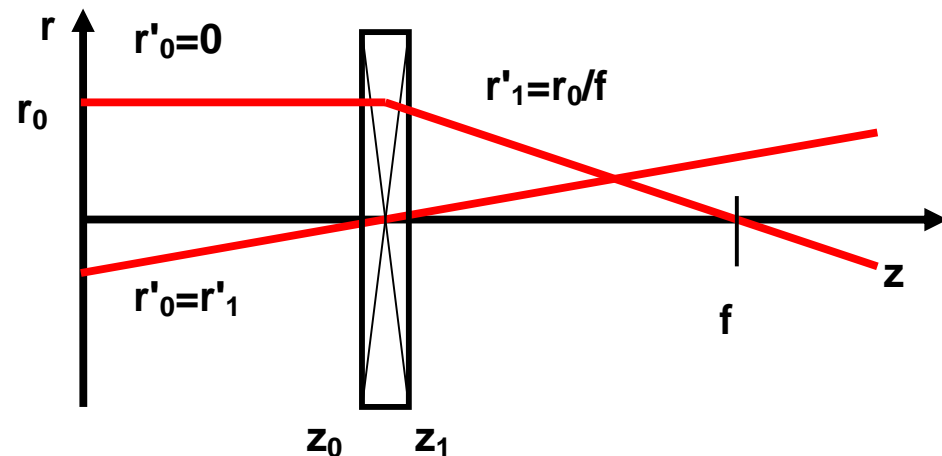
Die Fokussierung, Beschleunigung und der Transport geladener Teilchen werden unter dem Begriff der Teilchenoptik verallgemeinert. Neben der Matrizenschreibweise der Strahloptik spielt die Emittanz eine wichtige Rolle. Die DGL, welche die lineare Strahloptik begründet ist die Hillsche Differentialgleichung. Wir hatten gesehen, dass die Lösungen der Hillschen DGL die Strahltransportmatrix bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} c(s) & s(s) \\ c'(s) & s'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_0} \longrightarrow \vec{x}(s) = \underline{\underline{A}}(s) \cdot \vec{x}(s_0) \quad (3.1)$$

Der Strahltransport kann durch eine Folge diskreter Elemente beschrieben werden, wobei jedes Element durch eine Strahltransportmatrix $\underline{\underline{A}}_i(s)$ charakterisiert ist.

Beispiel: Dünne Linsen (Solenoidlinse, Diaphragmen)

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 \\ r'_1 &= -\frac{r_0}{f} + r'_0 \end{aligned} \longrightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$



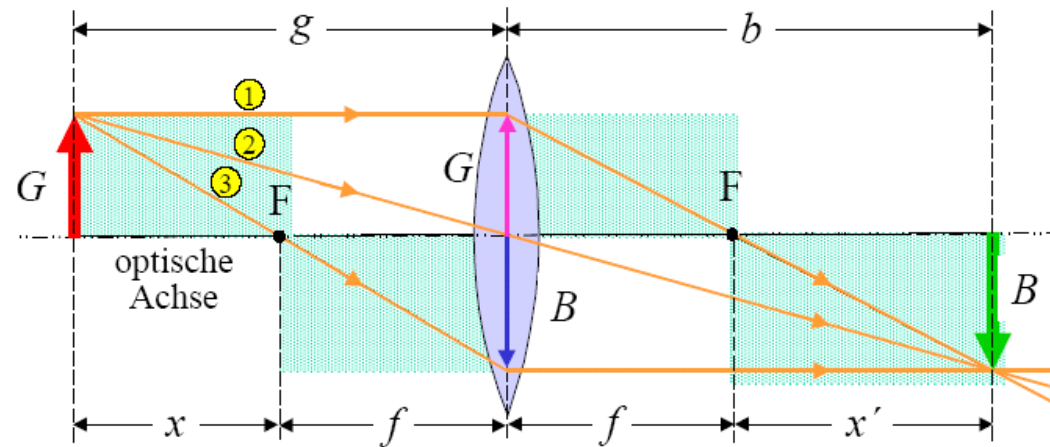
Phasenraumbetrachtung

Das System dünne Linse und Laufstrecke:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f} & L \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

für den Fall $f = L$ folgt:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} r_1 &= f \cdot r'_0 \\ r'_1 &= -\frac{r_0}{f} + r'_0 \end{aligned}$$



$$r_0 = G \quad ; \quad r'_0 = -\frac{G}{g} \quad r_1 \text{ hängt nicht von } r_0 \text{ ab} \rightarrow \text{Brennpunkt (F)}$$

für $r'_0 = 0$ ist $r_1 = 0 \rightarrow$ Parallelstrahl (1) und für $r_0 = 0$ ist $r'_1 = r'_0 \rightarrow$ Zentralstrahl (2)

Bisher haben wir die Bewegung von einzelnen Teilchen betrachtet. Nun wollen wir die Bewegung von Teilchenensembeln betrachten

Wie wir gesehen haben, spielen der Ort eines Teilchens (Entfernung von der Strahlachse) und der transversale Impuls (Winkel zur Strahlachse) bei der Beschreibung der Strahloptik eine wichtige Rolle. Betrachten wir die Determinante der Strahltransportmatrix so gilt:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} c(s) & s(s) \\ c'(s) & s'(s) \end{pmatrix} \quad \blacktriangleright \quad W = \begin{vmatrix} c(s) & s(s) \\ c'(s) & s'(s) \end{vmatrix} = c \cdot s' - c' \cdot s \quad , \quad \frac{dW}{ds} = cs'' - c''s$$

W = Wronskideterminante

Man kann nun zeigen, dass sich jede allgemeine DGL 2. Ordnung:

$$u'' + f(s) \cdot u' + g(s) \cdot u = 0$$

Mit dem Ansatz $u = r \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int f(s) ds\right)$ in eine Hillsche DGL transformieren kann. Daher gilt:

$$\begin{aligned} c'' + f(s) \cdot c' + g(s) \cdot c &= 0 \\ s'' + f(s) \cdot s' + g(s) \cdot s &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad (cs'' - c''s) + f(s)(cs' - c's) = 0$$

Damit gilt für W :

$$\frac{dW}{ds} = cs'' - c''s = -f(s) \cdot W \quad \Rightarrow \quad W = W_0 \exp\left[-\int_{s_0}^s f(s) ds\right] \quad (3.2)$$

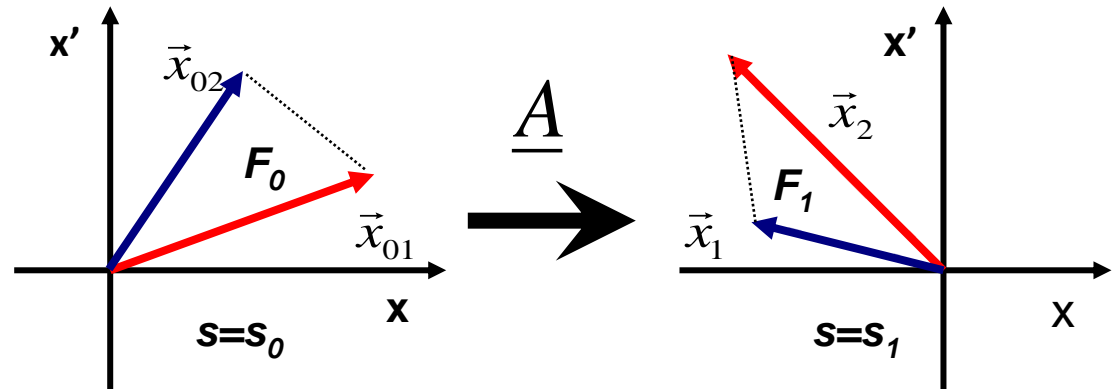
Phasenraumbetrachtung – Satz von Liouville

W ändert sich, wenn der Dämpfungsterm $f(s) \neq 0$ ist. Da c und s normiert sind, muss

$$W_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{sein.}$$

Ist die Pseudodämpfung $f(s) = 0$ bleibt $W = 1$. $f(s)$ ist z.B. ungleich Null bei Beschleunigung. Es gilt also $W = 1$, wenn keine Beschleunigung vorliegt. Wie transformiert sich nun eine Fläche im Phasenraum in dem wir die Orts und die Winkelkoordinate (x, x') auftragen:

$$F_0 = \frac{1}{2} |\vec{x}_{01} \times \vec{x}_{02}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{01} & x_{02} \\ x'_{01} & x'_{02} \end{vmatrix}$$



(3.3)

$$F_1 = \frac{1}{2} |\vec{x}_1 \times \vec{x}_2| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c & s \\ c' & s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} \\ x'_{01} & x'_{02} \end{pmatrix} = W \cdot F_0$$

Die Phasenraumfläche bleibt erhalten, wenn keine Pseudodämpfung vorliegt. Wir haben gesehen, dass sich die Phasenraumfläche unter einer Transformation ohne Dämpfung erhalten bleibt. Da man jede Fläche durch solche Dreiecke annähern kann, transformiert sich so jede beliebige Phasenraumfläche.

Phasenraumbetrachtung – Satz von Liouville

Die Teilchen eines Ensembles belegen mit ihren verschiedenen Anfangsbedingungen \vec{x}_{0i} ein gewisses Flächenstück in der x - x' -Ebene bei $s=s_0$. Dieses Transformiert sich gemäß (3.3). Damit transformiert sich die Dichte der Teilchen gemäß $1/W$ (W = Wert der Wronski-Determinante).

Dieses Prinzip ist viel allgemeiner und wird bestimmt durch den **Satz von Liouville**. Dieser Satz lässt sich direkt aus den Hamilton-Jakobischen DGL's herleiten:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\dot{q}_i$$

Wobei q_i , p_i die Teilchenkoordinaten im Phasenraum sind. Sie gelten für jedes mechanische System, in welchem keine geschwindigkeitsabhängigen Kräfte auftreten, wo v in Richtung der Kraft zeigt. D.h. die Lorentzkraft fällt nicht darunter. Die DGL's gelten nicht für dissipative Kräfte!

Ein System von n Teilchen mit den Koordinaten q_i , p_i mit $i = 1, 2, \dots, 3n$ stellt ein Punkt im $6n$ -dimensionalen Phasenraum (Γ -Raum) dar. Im Laufe der Zeit wird dieser Punkt durch den Γ -Raum wandern. Wie verhält sich nun benachbarte Phasenraumpunkte und damit die Dichte der Phasenraumpunkte?

$$\vec{r}_\Gamma = \sum_i q_i \vec{e}_i + \sum_i p_i \vec{\bar{e}}_i \quad , \quad \vec{v} = \sum_i \dot{q}_i \vec{e}_i + \sum_i \dot{p}_i \vec{\bar{e}}_i \quad \vec{e}_i, \vec{\bar{e}}_i = \text{Einheitsvektoren}$$

Phasenraumbetrachtung

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \sum_i \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right] = 0$$

Das Verschwinden der Divergenz \rightarrow Verhalten wie eine inkompressible Flüssigkeit
 Aus der Kontinuitätsgleichung folgt mit der Phasenraumdichte n :

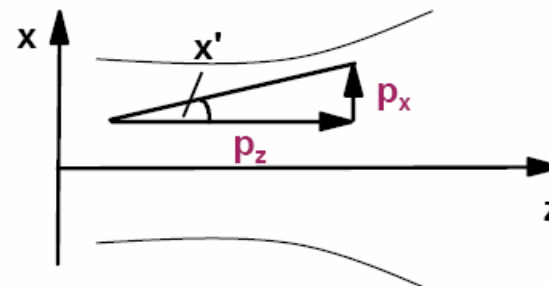
$$\operatorname{div}(n \cdot \vec{v}) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad n \cdot \nabla \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla n + \frac{\partial n}{\partial t} = \vec{v} \cdot \nabla n + \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{dn}{dt} = 0$$

Die Dichte der Phasenraumpunkte n bleibt konstant über die Zeit. Das Phasenraumvolumen, das eine bestimmte Zahl von Phasenraumpunkten einnimmt bleibt auch im Laufe der Zeit konstant. Das ist der **Satz von Liouville**, von der Erhaltung des $6n$ Phasenraumvolumens.

Man kann den Satz auf den 6-dimensionalen Phasenraum übertragen, wenn man keine Wechselwirkung der Teilchen untereinander hat, sondern die Bewegung von äußeren konservativen Feldern dominiert wird.

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d(\delta V)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_{6\text{dim}}} d^3 q \cdot d^3 p = 0$$

Im Allgemeinen werden Orts- und Impulskoordinaten als Phasenraum dargestellt. Bei der Strahloptik wird jedoch auf den longitudinalen Impuls normiert und daher mit Winkeln gearbeitet.



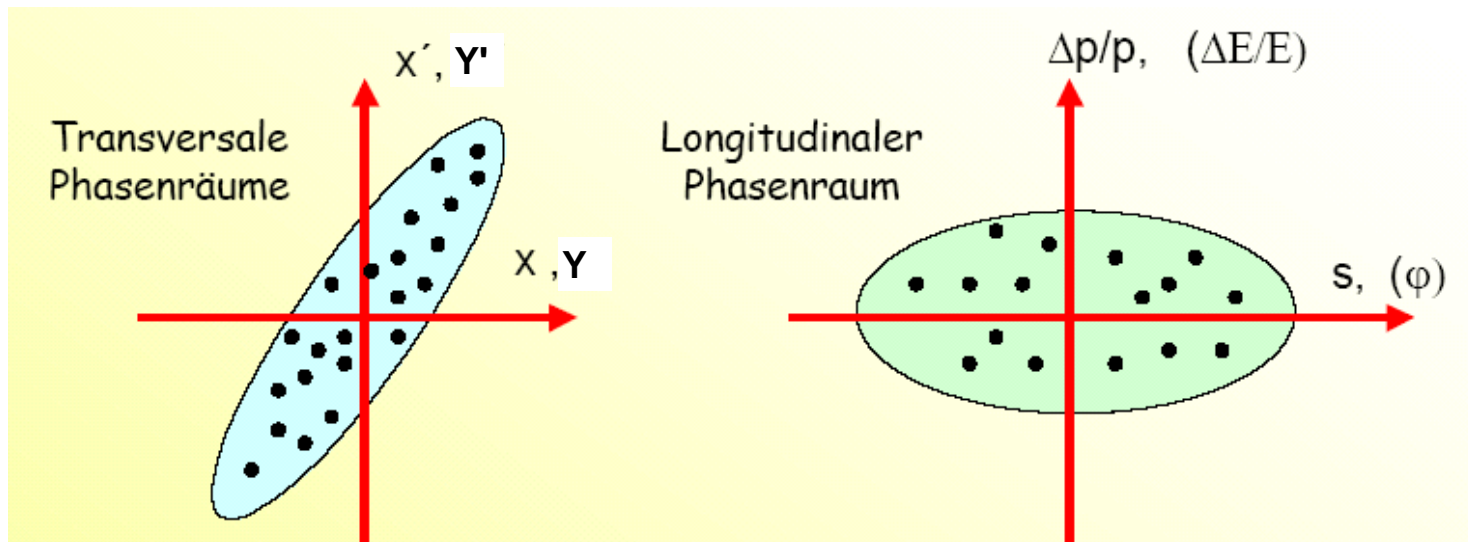
$$x' = \frac{p_x}{p_z}$$

2. Emittanz und Phasenellipse

Damit gilt die Erhaltung des Phasenraumvolumens, welcher der Teilchenstrahl im 6-dimensionalen Raum einnimmt. Während das Phasenraumvolumen konstant bleibt, gilt dies für die Oberfläche im Allgemeinen nicht.

Zerfällt die 3-dim. Bewegungsgleichung eines Teilchens in 3 unabhängige Bewegungsgleichungen in den Koordinaten x, y, s , so sind die Phasen-Unterräume voneinander entkoppelt. Die Fläche, die die Teilchen einnehmen ist ein Maß für die Qualität des Strahls. Diese Phasenraumfläche A im 2-dimensionalen Raum ist:

$$A_{xx'} = \frac{1}{p_s} \iint dx \cdot dp_x = \frac{1}{\gamma m_0 \beta c} \iint dx \cdot dp_x = \iint dx \cdot dx' \quad \text{mit} \quad x' = \frac{dx}{ds} = \tan\left(\frac{p_x}{p_s}\right) \approx \frac{p_x}{p_s}$$



Emittanz und Phasenellipse

Sind die Koordinaten voneinander entkoppelt, so bleiben die 2-dim-Phasenräume nach dem Satz von Liouville konstant. Dies gilt auch für $A_{xx'}$, wenn keine Beschleunigung stattfindet also $\beta \cdot \gamma = \text{const.}$ ist. Die sogenannte **Strahlemittanz** ist nun definiert als

$$\varepsilon_{xx'} = \frac{A_{xx'}}{\pi} = \frac{1}{\pi} \iint dx \cdot dx' \quad \text{in [mm*mrad]}, \quad (3.4)$$

dabei ist die normierte Emittanz (unabhängig von der Strahlenergie) $\varepsilon_{n,xx'} = \beta \gamma \cdot \varepsilon_{xx'}$

Aus der Summe der Einzellösungen einfacher linearer Bewegungsgleichungen für die einzelnen Teilchen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen, lässt sich relativ einfach ein Zusammenhang für das Teilchenkollektiv entwickeln. Wir gehen dabei von der Hillschen DGL aus und erinnern uns, daß es cosinus- und sinusartige Lösungen gibt. Daher versuchen wir den allgemeinsten Ansatz einer Schwingung:

$$x'' + k(s) \cdot x = 0 \quad \text{und} \quad x(s) = A \cdot u(s) \cos(\Psi(s) + \Psi_0)$$

$$x'(s) = A \cdot u' \cos(\Psi + \Psi_0) - A \cdot u \cdot \sin(\Psi + \Psi_0) \Psi'$$

$$x''(s) = A \cdot u'' \cos(\Psi + \Psi_0) - A \cdot u' \cdot \sin(\Psi + \Psi_0) \Psi' - A \cdot u' \cdot \sin(\Psi + \Psi_0) \Psi' - A \cdot u \cdot \cos(\Psi + \Psi_0) \Psi'^2 - A \cdot u \cdot \sin(\Psi + \Psi_0) \Psi''$$

Emittanz und Phasenellipse

Einsetzen in die Hillsche DGL ergibt:

$$\left[u'' - u \cdot \Psi'^2 + k \cdot u \right] \cos(\Psi + \Psi_0) - \left[u \cdot \Psi'' + 2u' \cdot \Psi' \right] \sin(\Psi + \Psi_0) = 0$$

Wenn dies für alle Teilchen gelten soll, müssen die Klammern Null sein. Aus der zweiten Klammer ergibt sich als Verbindung zwischen Phasenvorschub $\Psi(z)$ und Amplitude $u(z)$:

$$u \cdot \Psi'' = -2u' \cdot \Psi' \quad \Rightarrow \quad \Psi = \int \frac{dz}{u^2} \quad u'' - u \cdot \Psi'^2 + k \cdot u = u'' - \frac{1}{u^3} + k \cdot u = 0 \quad (3.5)$$

Im Allgemeinen führt man die Amplituden- oder β -Funktion ein, mit $\beta(s) = u^2(s)$. Außerdem ersetzt man die Amplitude durch $A = \sqrt{\varepsilon}$. Damit sind die für die lineare Strahloptik relevanten Funktionen:

$$x(s) = \sqrt{\varepsilon \beta(s)} \cdot \cos(\Psi(s) + \Psi_0)$$

$$x'(s) = \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{\beta'(s)}{2\sqrt{\beta(s)}} \cos(\Psi(s) + \Psi_0) - \sqrt{\varepsilon \beta(s)} \cdot \sin(\Psi(s) + \Psi_0) \frac{1}{\beta(s)} =$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} \cdot \left[\frac{\beta'(s)}{2} \cos(\Psi(s) + \Psi_0) - \sin(\Psi(s) + \Psi_0) \right] = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} \cdot [\alpha(s) \cos(\Psi + \Psi_0) + \sin(\Psi + \Psi_0)]$$

$$\text{mit} \quad \Psi(s) = \int \frac{ds}{\beta(s)} \quad \text{und} \quad \alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2} \quad (3.6)$$

Emittanz und Phasenellipse

Für die Anfangsbedingungen: $x_0 = \sqrt{\varepsilon\beta_0} \cdot \cos(\Psi_0)$

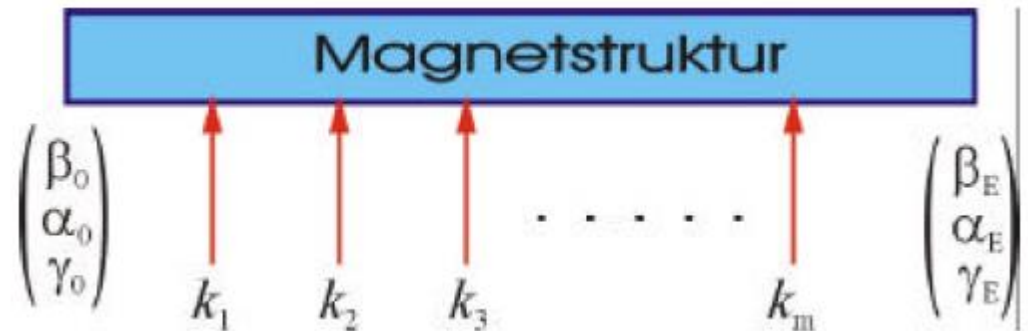
$$x'_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_0}} \cdot [\alpha_0 \cos(\Psi_0) + \sin(\Psi_0)]$$

folgt

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \Psi + \alpha_0 \sin \Psi) & \sqrt{\beta \cdot \beta_0} \sin \Psi \\ \frac{(\alpha_0 - \alpha) \cos \Psi - (1 + \alpha_0 \alpha) \sin \Psi}{\sqrt{\beta \cdot \beta_0}} & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} (\cos \Psi - \alpha \sin \Psi) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Man erkennt an dieser Matrix, dass neben den optischen Funktionswerten am Anfang und am Ort s der Struktur auch noch der Phasenvorschub der Betatronschwingung zwischen diesen beiden Punkten berücksichtigt werden muss.

Die optischen Funktionen am Ende der Strahltransportstruktur hängen bei gegebenen Anfangswerten α_0 , β_0 und γ_0 von den k-Werten der Magnete ab.



Emittanz und Phasenellipse

Dies sind Einzelteilchenlösungen für beliebige Anfangsparameter. Beispiele dafür sind unten dargestellt:

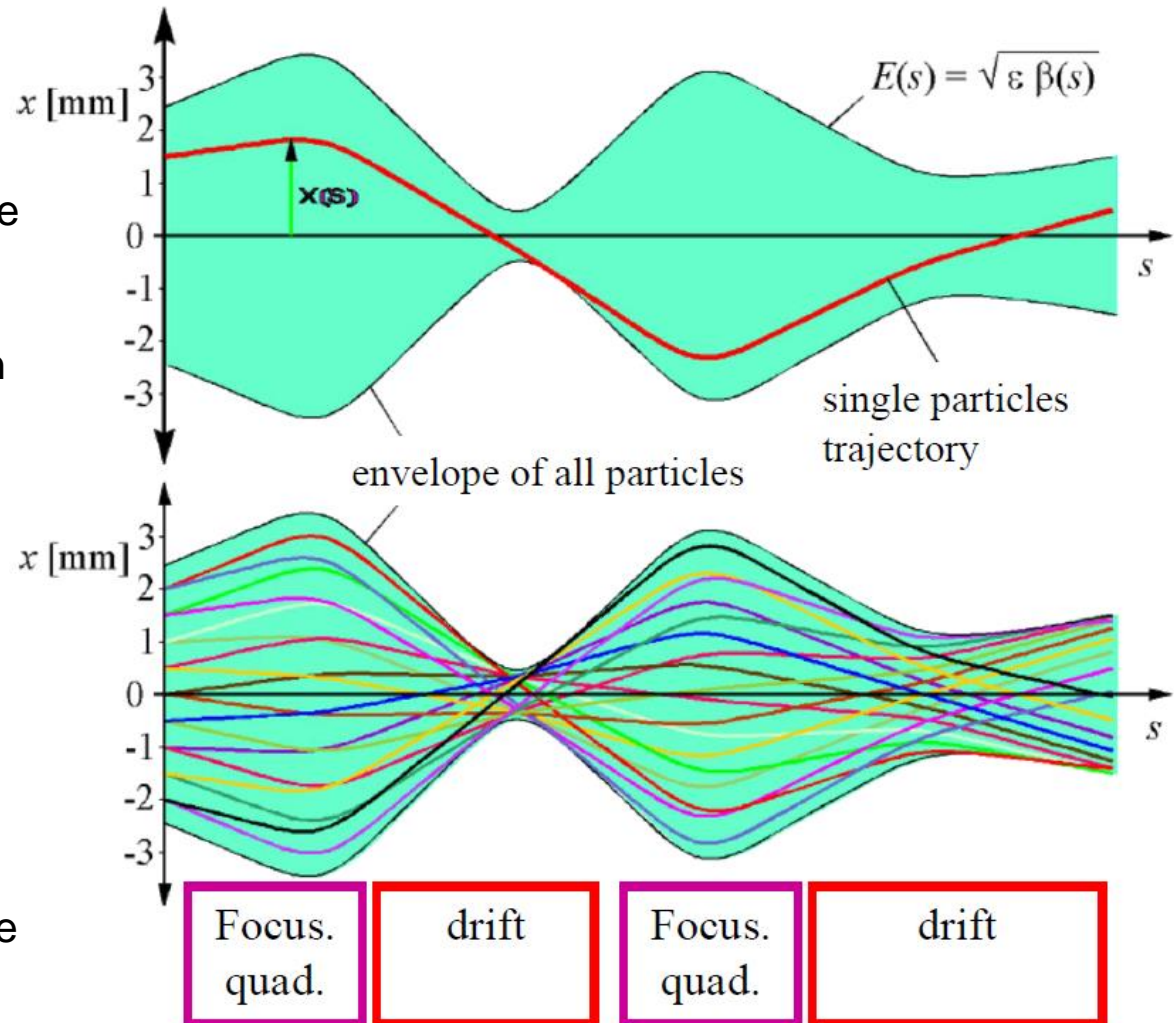
Lässt man die Anfangsphase das Intervall $[0, 2\pi]$ durchlaufen, dann beschreiben die Einzelteilchenlösungen in der x, x' -Ebene eine Ellipse.

Die einzelnen Teilchentrajektorien formen einen Strahl.

Diese haben eine Verteilung der Startposition und Startwinkel.

Charakteristisch ist die Strahl-enveloppe. Das Teilchen mit dem größten ε definiert die Strahlein-hüllende (Envelope)

Die Transformation der Enveloppe bestimmt die des gesamten Ensemble.



Emittanz und Phasenellipse

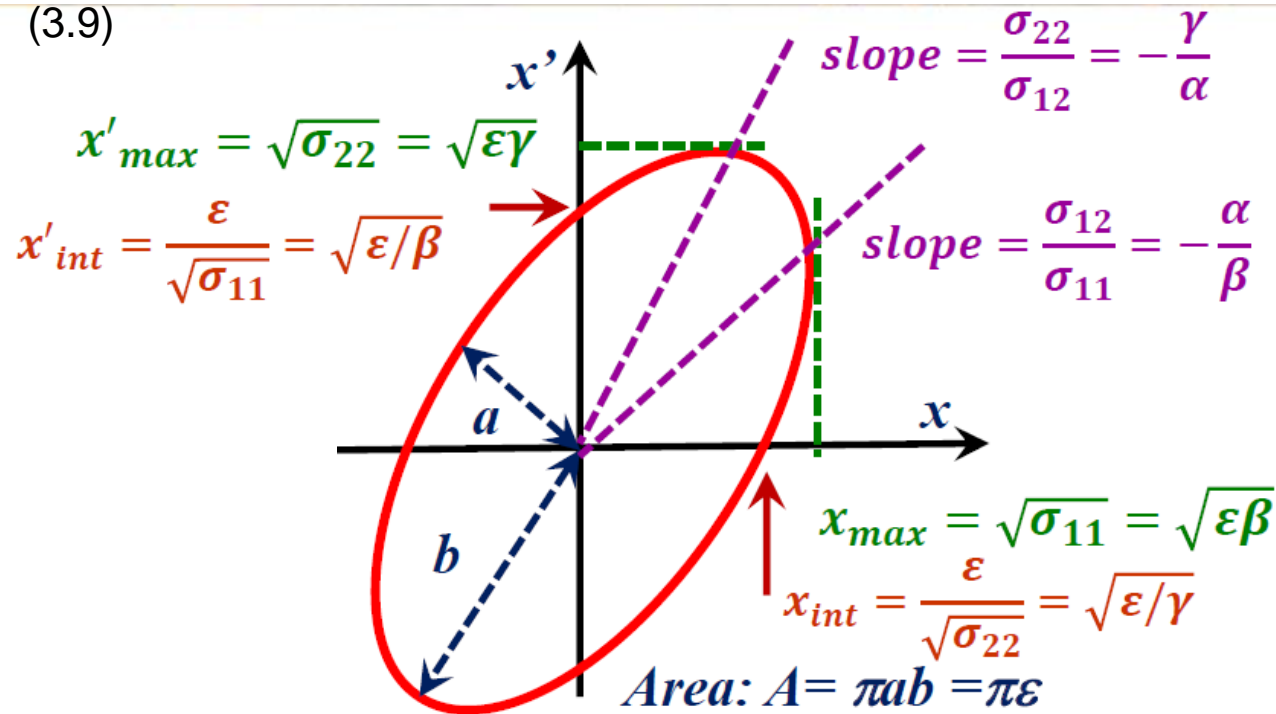
Mit $\cos^2(\Psi(s) + \Psi_0) + \sin^2(\Psi(s) + \Psi_0) = 1$ lassen sich die Winkelfunktionen eliminieren und

man erhält
$$\frac{x^2}{\beta(s)} + \left(\frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}} x + \sqrt{\beta(s)} \cdot x' \right)^2 = \varepsilon$$

oder
$$\gamma(s)x^2 + 2\alpha(s)xx' + \beta(s)x'^2 = \varepsilon \quad (3.8)$$

und
$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (3.9)$$

(3.8) ist eine Ellipsengleichung und beschreibt für einen vorgegebenen Ort s und ein vorgegebenes ε die Lage aller Teilchen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen. (3.9) verbindet die sogenannten **TWISS Parameter**.



Emittanz und Phasenellipse

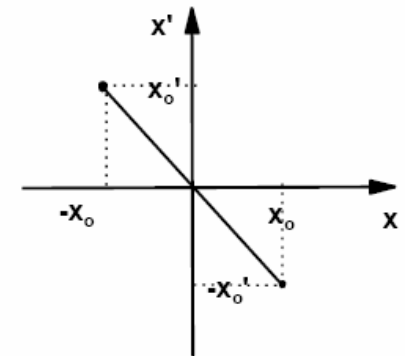
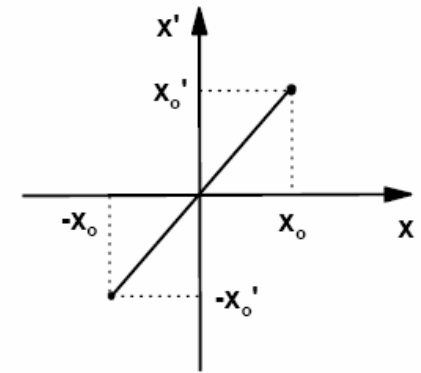
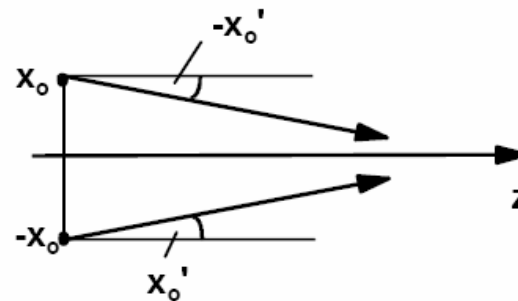
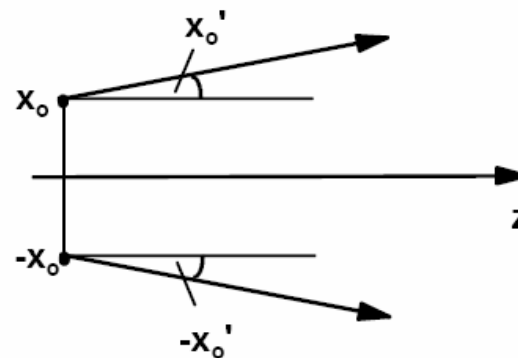
Für periodische Beschleuniger (etwa Ringe oder längere Linearbeschleuniger) wiederholen sich die optischen Funktionen $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ und ein einzelnes Teilchen läuft entlang der Ellipsenberandung. Teilchen mit anderen ε durchlaufen ähnliche Ellipsen. Das Teilchen mit dem größten ε bestimmt die von den Teilchen belegte Phasenraumfläche (Emittanz $\varepsilon = F/\pi$).

Man nennt nun $\alpha(s)$, $\beta(s)$ und $\gamma(z)$ die "**Twiss-Parameter**" und die Ellipse "**Courant-Snyder-Ellipse**". Die Darstellung der Ellipse zeigt die Bedeutung der Twiss-Parameter und der Lage der Ellipse bezüglich des Koordinatensystems im zweidimensionalen Phasenraum.

Orientierung in Bezug auf den Strahl

→ Die Darstellung zeigt, wie die Emittanzellipse für einen divergenten, sowie für einen konvergenten Strahl orientiert ist.

Wie sich die Emittanzellipse bei einer Drift oder einer Linse verändert, wird nun im folgenden dargestellt.



Emittanz und Phasenellipse

Bleibt die Emittanz erhalten so muss für zwei verschiedene Stellen s_0 und s entlang der Achse gelten (*):

$$\gamma(z)x^2 + 2\alpha(z)xx' + \beta(z)x'^2 = \gamma(z_0)x_0^2 + 2\alpha(z_0)x_0x'_0 + \beta(z_0)x_0'^2 = \varepsilon$$

$$\vec{X}^T \cdot \underline{\tau} \cdot \vec{X} = (x \quad x')_z \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_z = \gamma(z)x^2 + 2\alpha(z)xx' + \beta(z)x'^2$$

dabei ist $\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ die Inverse von $\underline{\nu} = \underline{\tau}^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix}$

$$\vec{X} = \underline{A} \cdot \vec{X}_0 \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_z = \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} c(z) & s(z) \\ c'(z) & s'(z) \end{pmatrix}, \quad \underline{A}^T = \begin{pmatrix} c(z) & c'(z) \\ s(z) & s'(z) \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir aus (*)

$$\vec{X}_0^T \cdot \underline{\tau}_0 \cdot \vec{X}_0 = (\underline{A}^{-1} \vec{X})^T \cdot \underline{\tau}_0 \cdot (\underline{A}^{-1} \vec{X}) = \vec{X}^T (\underline{A}^{-1})^T \cdot \underline{\tau}_0 \cdot \underline{A}^{-1} \vec{X} = \vec{X}^T \cdot \underline{\tau} \cdot \vec{X}$$

$$\Rightarrow \underline{\tau} = (\underline{A}^{-1})^T \cdot \underline{\tau}_0 \cdot \underline{A}^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{\tau}^{-1} = \underline{\nu} = \underline{A} \cdot \underline{\nu}_0 \cdot \underline{A}^T \tag{3.10}$$

Emittanz und Phasenellipse

Aus diesen Gleichungen folgt für die Transformation der Twiss-Parameter (in der Strahlmatrix \underline{v}):

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \beta(s) & -\alpha(s) \\ -\alpha(s) & \gamma(s) \end{pmatrix} = \underline{A} \circ \underline{v}_0 \circ \underline{A}^T$$

und damit
$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \beta(s) & -\alpha(s) \\ -\alpha(s) & \gamma(s) \end{pmatrix} = \underline{A} \circ \underline{v}_0 \circ \underline{A}^T = \begin{pmatrix} c(z) & s(z) \\ c'(z) & s'(z) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \beta_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c(z) & c'(z) \\ s(z) & s'(z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & -2sc & s^2 \\ -cc' & cs' + sc' & -ss' \\ c'^2 & -2s'c' & s'^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Beispiel Drift:

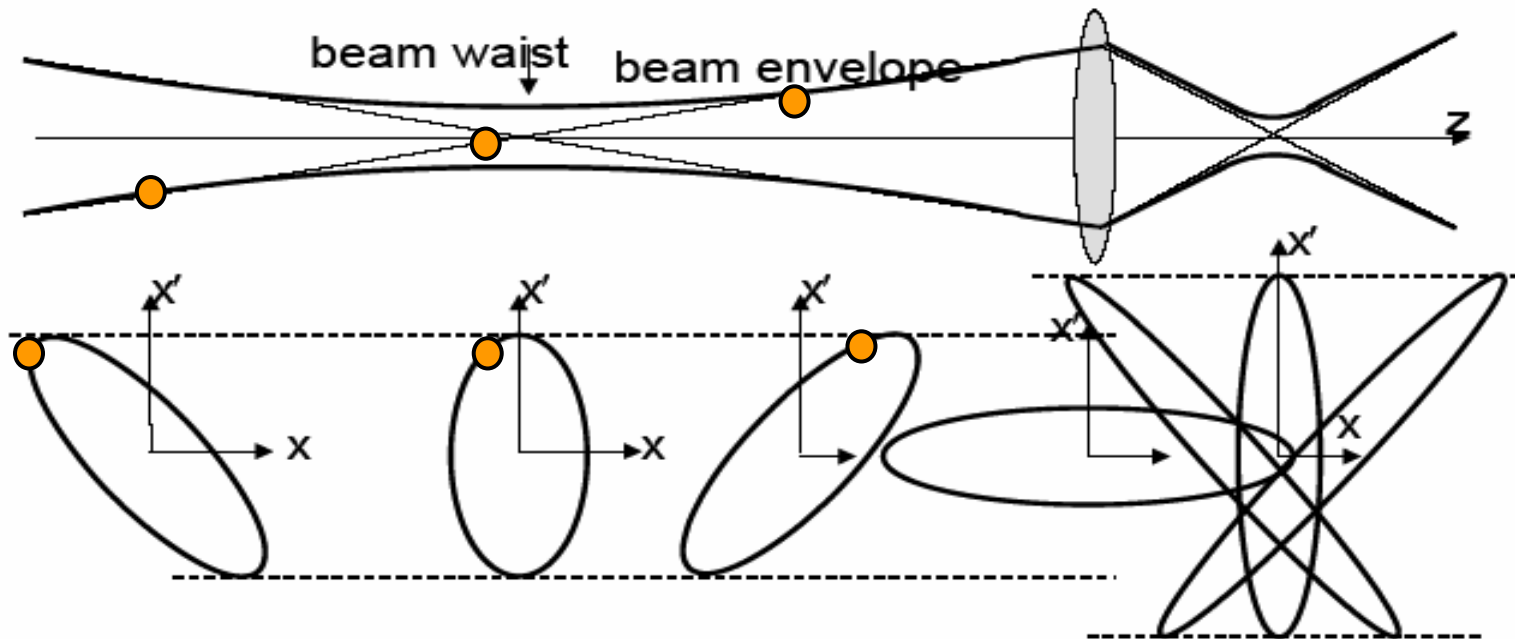
$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ c' & s' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} \beta &= \beta_0 - 2\alpha_0 L + \gamma_0 L^2 \\ \alpha &= \alpha_0 - \gamma_0 L \\ \gamma &= \gamma_0 \end{aligned}$$

Bei einer Drift ändern sich die Winkel nicht, daher ist γ konstant.
Man erkennt außerdem

$$\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2}$$

Emittanz und Phasenellipse

Die β -Funktion, welche den Strahlradius bestimmt verläuft parabelförmig. Die Halbachsen der Ellipse zeigen in die Achsenrichtungen, wenn $\alpha = 0$ wird. Dann hat der Strahl eine Taille. Ist $\alpha_0 > 0$, d.h. der Strahl am Anfang konvergent, so wird dieser die Taille oder "waist" an der Stelle $S = \alpha_0 / \gamma_0$ haben.



Die sogenannte Strahlmatrix (beam matrix) erhält man durch

$$\underline{\sigma} = \underline{\varepsilon} \cdot \underline{V} = \begin{pmatrix} \varepsilon\beta & -\varepsilon\alpha \\ -\varepsilon\alpha & \varepsilon\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

3. RMS-Emittanz

Die Determinante der Strahlmatrix ist $\det(\underline{\sigma}) = \varepsilon^2 \cdot \det(\underline{\nu}) = \varepsilon^2 (\beta\gamma - \alpha^2) = \varepsilon^2$

$$\varepsilon = \sqrt{\det(\underline{\sigma})} = \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \quad (3.13)$$

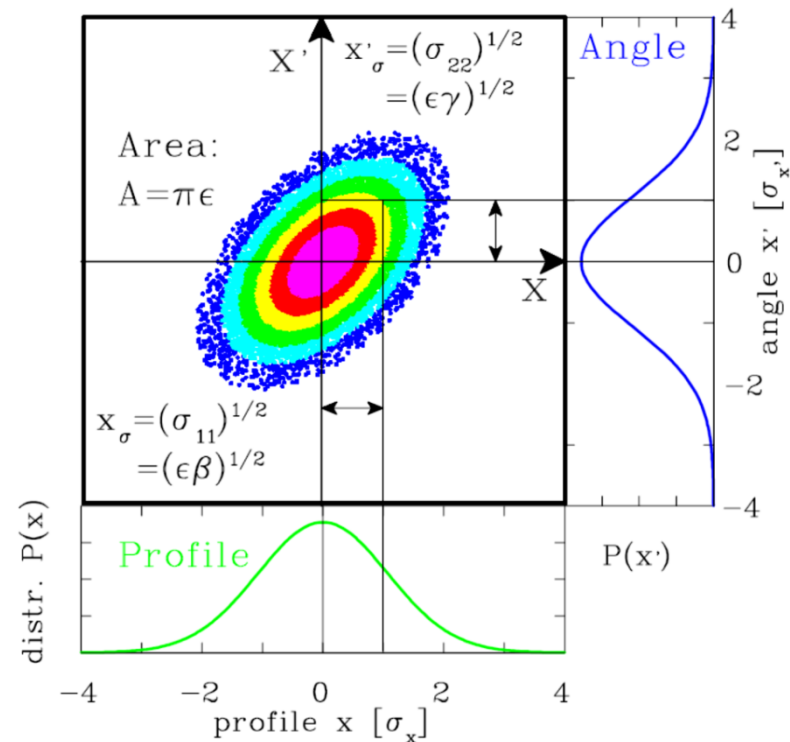
Die maximale Ausdehnung der Ellipse in die x- und x'-Richtung ergibt sich aus

$$x_{\max} = \sqrt{\sigma_{11}} = \sqrt{\varepsilon\beta} \quad , \quad x'_{\max} = \sqrt{\sigma_{22}} = \sqrt{\varepsilon\gamma} \quad (3.14)$$

Alle Punkte, welche die Gleichung $\vec{X}^T \cdot \underline{\sigma}^{-1} \cdot \vec{X} = 1$ erfüllen (folgt aus (*)), liegen auf der Emittanzellipse mit der Emittanz ε . Wir haben jedoch bisher noch nichts über Dichteverteilungen in dem von der Phasenellipse umrandeten Gebiet gesagt. Die einfachsten Modelle gehen von einer homogenen Dichteverteilung aus. Dies ist nur eine grobe Näherung. Eine realistischere Annahme sind Modelle der Gauß- oder waterbag-Verteilung. Im Fall von Verteilungen wird die Strahlmatrix statistisch definiert:

$$x_{\sigma} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\sigma_{11}} \quad , \quad x'_{\sigma} = \sqrt{\langle x'^2 \rangle} = \sqrt{\sigma_{22}}$$

$$\text{COV} = \sqrt{\langle xx' \rangle} = \sqrt{\sigma_{12}} \quad (3.15)$$



RMS-Emittanz

Dabei ist cov die Korrelation oder Covarianz der Verteilung. Bei einer Gaußverteilung entspricht x_σ der Standardabweichung der Gaußverteilung. Allgemein gilt für Emittanzen von Verteilungen der **root mean square** oder RMS-Wert der Emittanz

$$\mathcal{E}_{RMS} = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} \text{ mit } \beta_{rms} = \frac{\langle x^2 \rangle}{\mathcal{E}_{RMS}} \quad \gamma_{rms} = \frac{\langle x'^2 \rangle}{\mathcal{E}_{RMS}} \quad \alpha_{rms} = \frac{\langle xx' \rangle}{\mathcal{E}_{RMS}} \quad (3.16)$$

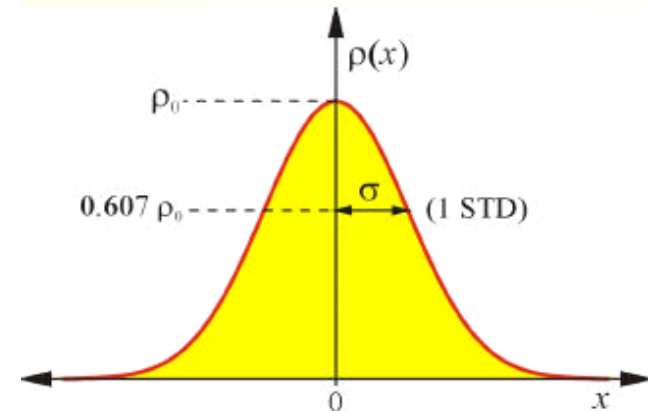
Für 2-dimensionale Verteilungen ist dies die Emittanz für eine Standardabweichung. Allgemein gilt nun dafür:

$$\langle x \rangle = \mu = \frac{\iint x \cdot \rho(x, x') dx dx'}{\iint \rho(x, x') dx dx'}$$

$$\langle x' \rangle = \mu' = \frac{\iint x' \cdot \rho(x, x') dx dx'}{\iint \rho(x, x') dx dx'}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\iint (x - \mu)^2 \cdot \rho(x, x') dx dx'}{\iint \rho(x, x') dx dx'} \quad , \quad \langle x'^2 \rangle = \frac{\iint (x' - \mu')^2 \cdot \rho(x, x') dx dx'}{\iint \rho(x, x') dx dx'} \quad (3.17)$$

Als **Strahlbreite** wird **eine Standardabweichung** der Dichteverteilung definiert



$$\text{cov} = \langle xx' \rangle = \frac{\iint (x - \mu)(x' - \mu') \cdot \rho(x, x') dx dx'}{\iint \rho(x, x') dx dx'}$$

Die Integrale in (3.17) gehen von minus bis plus Unendlich. Ein einfaches Beispiel ist die RMS-Emittanz einer homogenen Verteilung in der Emittanzellipse bis x_{\max} und x'_{\max} . Diese werden wir in den Übungen rechnen. Wir betrachten kurz die Gauß- und water bag-Verteilungen. Die Dichteverteilung einer nicht normierten 2-dimensionalen Gaußverteilung ist

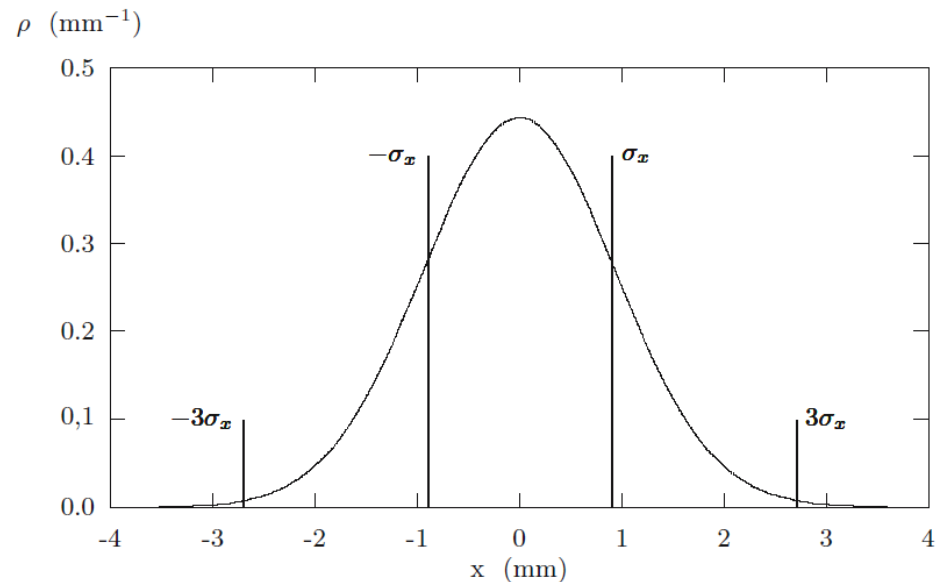
$$\rho(x, x') = \exp\left[-\frac{1}{2} \vec{X}^T \cdot \underline{\sigma}^{-1} \cdot \vec{X}\right] = \exp\left[-\frac{1}{2 \det(\underline{\sigma})} (\sigma_{22}x^2 - 2\sigma_{12}xx' + \sigma_{11}x'^2)\right] \quad (3.18)$$

Die Phasenraumellipse $\vec{X}^T \cdot \underline{\sigma}^{-1} \cdot \vec{X} = 1$ markiert die Höhenlinie, bei der die Dichte um den Faktor $\exp(-1/2)$ kleiner ist, als die Dichte im Zentrum. Diese Höhenlinie entspricht einer Standardabweichung beim Strahlprofil, die Emittanz der RMS-Emittanz.

Die Höhenlinie $\vec{X}^T \cdot \underline{\sigma}^{-1} \cdot \vec{X} = 4$

entspricht 2 Standardabweichungen, etc.

$$\varepsilon_{xx'}^{2\sigma} = 4\varepsilon_{xx'}^{\sigma} = 4\varepsilon_{RMS}$$



Setzt man nun (3.18) in die Gleichungen von (3.17) ein, dann erhält man für die RMS-Werte exakt die Gleichungen (3.15). Um die Berechnung zu erläutern rechnen wir die Normierung

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp\left[-\frac{1}{2\det(\underline{\sigma})} \left(\sigma_{22}x^2 - 2\sigma_{12}xx' + \sigma_{11}x'^2\right)\right]$$

Mit der Variablensubstitution $v = \sqrt{\sigma_{11}} \cdot x$, $u = \sqrt{\sigma_{22}} \cdot x'$ und $\tau = \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$ erhält man

$$\sigma_{22}x^2 - 2\sigma_{12}xx' + \sigma_{11}x'^2 = u^2 - \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} uv + v^2 = (u - \tau v)^2 + (1 - \tau^2) \cdot v^2 = w^2 + (1 - \tau^2) \cdot v^2$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \int_{-\infty}^{\infty} dw \exp\left[-\frac{w^2}{2\det(\underline{\sigma})}\right] \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left[-\frac{1-\tau^2}{2\det(\underline{\sigma})} v^2\right] = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1}{2\det(\underline{\sigma})}}} \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{1-\tau^2}{2\det(\underline{\sigma})}}} \\ &= \frac{2\pi \det(\underline{\sigma})}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} \cdot \sqrt{1-\tau^2}} = 2\pi \sqrt{\det(\underline{\sigma})} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Für eine Gaußverteilung ergibt das Vierfache der RMS-Emittanz die 90%-Emittanz (innerhalb dieser Emittanzellipse befinden sich 90% der Strahlteilchen). Schwieriger wird es bei anderen Dichteverteilungen oder nicht ellipsenförmigen oder filamentierten Phasenräumen.

Definition von Ellipsen mit der entsprechenden Fläche, die 100%, 90% der Teilchen umfassen (also der Randemittanz) über die RMS-Werte.

Emittanzellipsen

Wirken nicht lineare Kräfte auf die die Teilchen, so filamentiert die Verteilung. Die Phasenraumfläche bleibt zwar erhalten --> Emittanzellipse muss jedoch den Strahl umfassen und ist dadurch größer als die eigentliche Phasenraumfläche --> Emittanzwachstum

Dissipative Kräfte führen zu einem wirklichen Emittanzwachstum. Dispersion vom Magneten führt zu einer Kopplung der Unterräume und damit zum Emittanzwachstum der 2 dimensionalen Emittanz.

Randemittanz ist die wirkliche Phasenraupfläche, welche nach Liouville konstant bleibt.

Effektive Emittanz ist die Phasenraumfläche, die des Strahl welche von einem Strahltransportsystem akzeptiert werden muss.

Teilemittanz: Die Ellipse enthält nur eine Fraktion der im Strahl vorhandenen Teilchen. Häufigste Verwendung der Teilfraktionen 80%, 90%, 95%, 99% und 100%

