Ringbeschleuniger und Speicherringe
Übungsblatt 2

Prof. Dr. O. Kester, Aufgabenstellung Dr. P. Forck

Sommersemester 2015

1 Berechung der Strahlmatrix einer Verteilung

a) Die Berechnung der statischen Momente erfolgt nach:

$$\langle x^2\rangle = \left(\frac{4^2+3^2+1^2}{3}\right)\ \mathrm{mm}^2 = 8.667\ \mathrm{mm}^2 \tag{1}$$

$$\langle xx'\rangle = \left(\frac{-8-1-3}{3}\right)\ \mathrm{mm\ mrad} = -4\ \mathrm{mm\ mrad} \tag{2}$$

$$\langle x'^2\rangle = \left(\frac{4+1+1}{3}\right)\ \mathrm{mrad}^2 = 2\ \mathrm{mrad}^2 \tag{3}$$

Dier Strahlmatrix ist damit

$$\sigma = \begin{pmatrix} \langle x^2\rangle & \langle xx'\rangle \\ \langle xx'\rangle & \langle x'^2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.667\ \mathrm{mm}^2 & -4\ \mathrm{mm\ mrad} \\ -4\ \mathrm{mm\ mrad} & 2\ \mathrm{mrad}^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Der Strahl ist konvergent da die Korrelation $\langle xx'\rangle$ negativ ist.
b) Die Emittanz ist

$$\epsilon_{rms} = \sqrt{\det(\sigma)} = 1.155\ \mathrm{mm\ mrad} \tag{5}$$

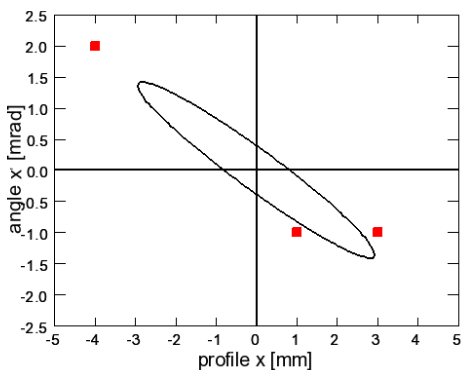
c) Die Twiss-Parameter sind

$$\beta = \frac{\langle x^2\rangle}{\epsilon_{rms}} = 7.51\ \mathrm{m} \tag{6}$$

$$\gamma = \frac{\langle x'^2\rangle}{\epsilon_{rms}} = 1.73\ \mathrm{m}^{-1} \tag{7}$$

$$\alpha = \frac{\langle xx'\rangle}{\epsilon_{rms}} = 3.46 \tag{8}$$

d) Die graphische Darstellung ist unter Benutzung der Werte $x_{int} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\gamma}} = 0.82$ mm und $x'_{int} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}} = 0.39$ mrad:



2 Stabilität einer FODO-Zelle eines Synchrotrons

a) Die Twiss-Matrix der definierten FODO-Zelle ist:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{M}_D \cdot \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{M}_F \tag{9}$$

in Komponenten ist der Ansatz:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Es ergibt sich damit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{2f} - \frac{l^2}{4f^2} & \frac{l^2}{2f} \\ -\frac{l}{2f^2} & \frac{l}{2f} + 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

b) Die Spur der Twiss Matrix ist

$$Tr(\mathbf{M}) = 2 - \frac{l^2}{4f^2} \quad .$$

Das Stabilitätskriterium ist

$$2 \cdot \cos\mu = Tr(\mathbf{M}) = 2 - \frac{l^2}{4f^2} \quad .$$

Damit μ reell ist muss also gelten

$$-1 < 1 - \frac{l^2}{8f^2} < 1 \quad .$$

Der rechte Teil der Ungleichung ist immer erfüllt; es folgt für den linken Ungleichung

$$\Rightarrow 2 > \frac{l^2}{8f^2} \Leftrightarrow f^2 > \frac{1}{16} \cdot l^2$$

und damit als Ergebnis

$$f > \frac{1}{4} \cdot l \quad .$$

c) Für den Phasen-Vorschub von $\mu = 90^o$ ist $\cos\mu = 0$ damit $0 = Tr(\mathbf{M}) = 2 - \frac{l^2}{4f^2} \Rightarrow f = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot l$

3 Inversion der Twiss-Matrix

Der Beweis erfolgt durch einfaches ausrechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} &= (\cos\mu\mathbf{I} + \sin\mu\mathbf{J}) \cdot (\cos\mu\mathbf{I} - \sin\mu\mathbf{J}) \\ &= \cos^2\mu \cdot \mathbf{I} - \cos\mu\sin\mu \cdot \mathbf{IJ} + \sin\mu\cos\mu \cdot \mathbf{JI} - \sin^2\mu \cdot \mathbf{J}^2 \\ &= \cos^2\mu \cdot \mathbf{I} + \sin^2\mu \cdot \mathbf{I} \\ &= \left(\cos^2\mu + \sin^2\mu\right)\mathbf{I} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned} \tag{12}$$

unter Benutzung der in der Vorlesung gezeigten Beziehung $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$.