Ringbeschleuniger und Speicherringe
Lösungsblatt 1

Prof. Dr. O. Kester

Sommersemester 2015

1 Linsensysteme

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{f} - \frac{dl}{f^2} & 2l + d - \frac{dl^2}{f^2} \\ -\frac{d}{f^2} & -\frac{dl}{f^2} - \frac{d}{f} + 1 \end{pmatrix}$$

Für eine Punkt-zu-Punkt-Abbildung muss gelten :

$$m_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2l + d - \frac{dl^2}{f^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \sqrt{\frac{dl^2}{2l+d}}$$

2 Hillsche DGL

Aus $y(s) = A_1 e^{w\cdot s} + A_2 e^{-w\cdot s}$ folgt

$$\frac{dy}{ds} = y' = A_1 w e^{w\cdot s} - A_2 w e^{-w\cdot s}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = y'' = A_1 w^2 e^{w\cdot s} + A_2 w^2 e^{-w\cdot s}$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$A_1 w^2 e^{w\cdot s} + A_2 w^2 e^{-w\cdot s} - kA_1 e^{w\cdot s} - kA_2 e^{-w\cdot s} = 0.$$

$$\left(w^2 - k\right)\left(A_1 e^{w\cdot s} + A_2 e^{-w\cdot s}\right) = 0$$

Daraus folgt $w = \sqrt{k}$. Mit den Randbedingungen $y(s=0) = y_0 = A_1 + A_2$ und $y_0' = (A_1 - A_2)\,w$ ergibt sich für die Größen A_1 und A_2:

$$A_2 = y_0 - A_1 \quad \rightarrow \quad y_0' = (A_1 - y_0 + A_1)\,w \quad \rightarrow \quad \frac{y_0'}{w} + y_0 = 2A_1$$

$$A_1 = \frac{y_0'}{2\sqrt{k}} + \frac{y_0}{2} \quad \text{und} \quad A_2 = -\frac{y_0'}{2\sqrt{k}} + \frac{y_0}{2}$$

Die Lösung lautet damit

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{y_0'}{2\sqrt{k}} + \frac{y_0}{2}\right) e^{\sqrt{k}\cdot s} + \left(-\frac{y_0'}{2\sqrt{k}} + \frac{y_0}{2}\right) e^{-\sqrt{k}\cdot s} \\ &= y_0 \left[\frac{e^{\sqrt{k}\cdot s} + e^{-\sqrt{k}\cdot s}}{2}\right] + \frac{y_0'}{\sqrt{k}} \left[\frac{e^{\sqrt{k}\cdot s} - e^{-\sqrt{k}\cdot s}}{2}\right] \\ &= y_0 \cosh(\sqrt{k}s) + \frac{y_0'}{\sqrt{k}} \sinh(\sqrt{k}s) \end{aligned}$$

3 Addition von Driftstrecken

$$R_D(L_1) \cdot R_D(L_2) = \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_1 + L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R_D(L_1 + L_2)$$

4 Ablenkung im Synchrotron, magnetische Steifigkeit

Folgende Formeln werden benötigt:

$$\rho B = \frac{\gamma m_0 \beta c}{Q} \quad \text{mit} \quad Q = qe, \quad \gamma = 1 + \frac{E_k in}{m_0 c^2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$$

Die maximale magnetische Steifigkeit beträgt $\rho B_{\max} = 10 \text{ m} \cdot 1,8 \text{ T} = 18 \text{ Tm}$.

^{238}U^{73+} Ionen bei 2,3 GeV/u

$$\gamma = 1 + \frac{238 \cdot 2300 \text{ MeV}}{238 \cdot 931,49 \text{ MeV}/c^2 \cdot c^2} = 3,46916 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = 0,9576$$

$$\begin{aligned} \rho B = \frac{\gamma m_0 \beta c}{Q} &= \frac{3,46916 \cdot 238 \cdot 931,49 \text{ MeV}/c^2 \cdot 0,9576 \cdot c}{73\ e} \\ &= \frac{3,46916 \cdot 238 \cdot 931,49 \text{ MV} \cdot 0,9576}{73\ c} = 33,65 \text{ Tm} > \rho B_{\max} \end{aligned}$$

Die angeforderten Ionen sind nicht lieferbar.

^{238}U^{73+} Ionen bei 190 MeV/u

$$\gamma = 1 + \frac{190 \text{ MeV}}{931,49 \text{ MeV}} = 1,2040 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = 0,5569$$

$$\rho B = \frac{1,2040 \cdot 238 \cdot 931,49 \text{ MV} \cdot 0,5569}{28\ c} = 17,71 \text{ Tm} < \rho B_{\max}$$

Die angeforderten Ionen sind lieferbar.