

10.) Raumladungseffekte

Bisher haben wir die Kräfte aufgrund der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen den Strahlteilchen nicht behandelt. Bei signifikanten Strahlströmen wird die Raumladung im Strahl so groß, dass die Raumladungskräfte nicht mehr vernachlässigt werden können. Die Abstoßung der Teilchen bewirkt eine Defokussierung, die bei niedriger Energie besonders groß ist.

Die durch die Raumladung hervorgerufenen Effekte werden **kollektive Effekte** genannt. Es muss aber auch die elektromagnetische Wechselwirkung der Teilchen mit den Strahlrohrwänden berücksichtigt werden (Spiegelladungen, Spiegelströme).

- β klein \rightarrow direkte Raumladungskräfte überwiegen
- $\beta \sim 1$ \rightarrow Wandeffekte überwiegen \rightarrow Kiefelder (wake fields)

Wenn Kiefelder durch eine Störung verstärkt werden \rightarrow **kollektive Instabilitäten**

10.1. Raumladungseffekte – nicht relativistisch

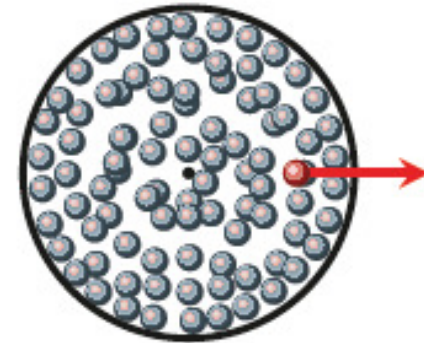
Wir betrachten zwei Teilchen mit identischer Ladung q . Diese erfahren eine Abstoßung aufgrund der Coulombkraft

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}$$



Betrachten wir nun ein Testteilchen in einem Strahl mit rundem Querschnitt der Teilchen mit Ladung q_i .

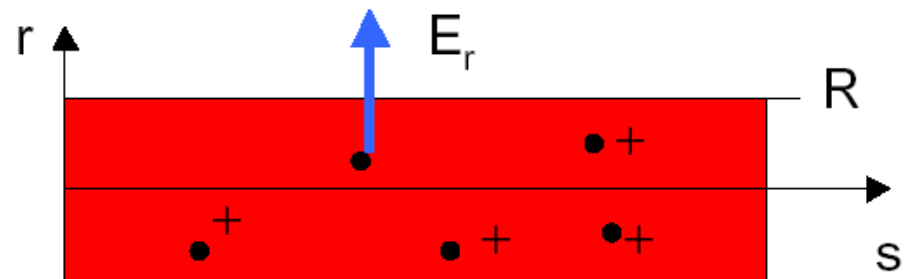
Die Coulombkraft drückt das Testteilchen nach außen. Die Kraft ist Null auf der Achse und wächst zu Strahlrand hin. Eine radiale Kraft wirkt auf die Teilchen und führt zu einer Defokussierung des Strahls. Das Raumladungsfeld kann man wie folgt berechnen:



$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_F \vec{E} \cdot d\vec{F} = -\int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

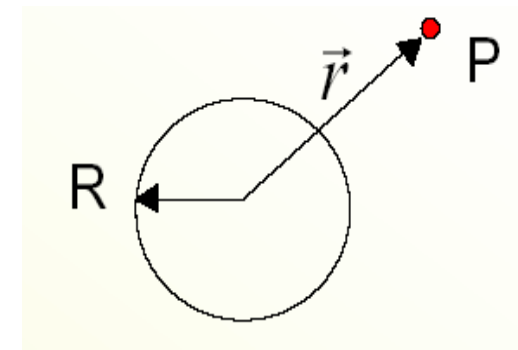
$$E_r(r) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 \cdot r l} \int_V \rho \cdot dV$$

$$E_r(r) = -\frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') \cdot r' dr'$$



Hier wurde Zylindersymmetrie angenommen und keine Variation in die s-Richtung.

Haben wir eine homogene Raumladungsverteilung vorliegen dann gilt $\rho(r') = \rho_0$ und es folgt



$$\text{A: } r < R \quad \Rightarrow \quad E(r) = -\frac{\rho_0 \cdot r}{2\epsilon_0}$$

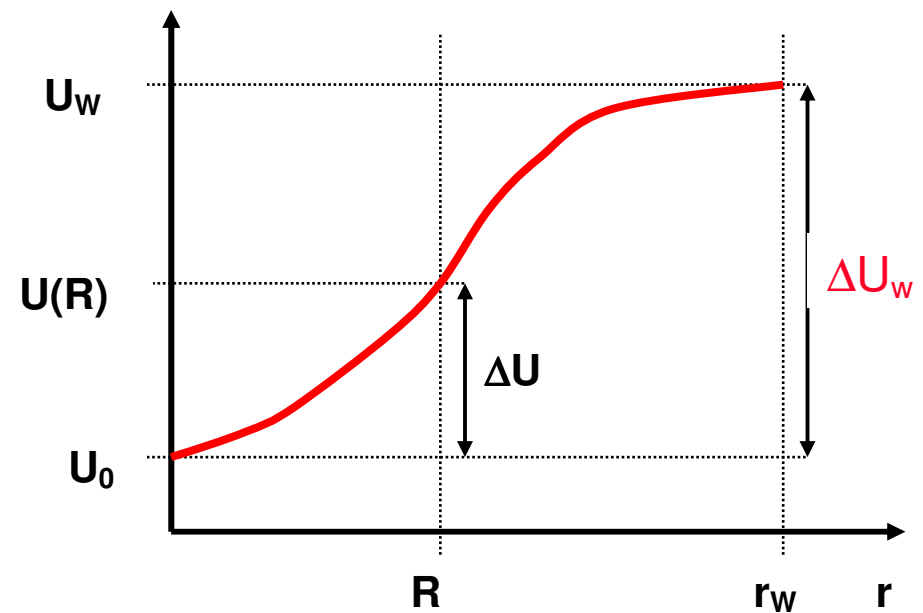
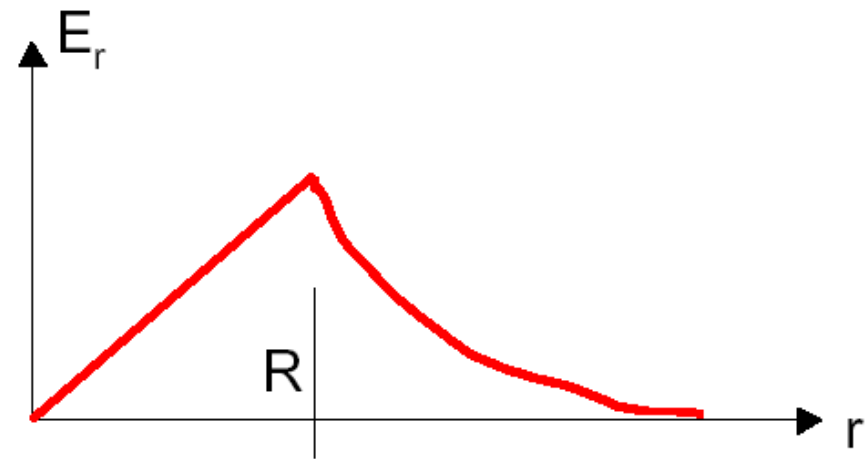
$$\text{B: } r > R \quad \Rightarrow \quad E(r) = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r}$$

Daraus erhält man das Potential:

$$U(r) = -\int_0^r E(r) dr + U_0$$

$$\text{A: } r < R \quad \Rightarrow \quad U(r) = \frac{\rho_0 \cdot r^2}{4\epsilon_0} + U_0$$

$$\begin{aligned} \text{B: } r > R \quad \Rightarrow \quad U(r) &= \frac{\rho_0 \cdot R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + U(R) \\ &= \frac{\rho_0 \cdot R^2}{4\epsilon_0} \left[2 \cdot \ln\left(\frac{r}{R}\right) + 1 \right] + U_0 \end{aligned}$$



Dabei ist $U_0 = U(r=0)$. U_0 kann man aus dem gegebenen Wandpotential $U_W = U(r_W)$ ermitteln:

$$U_W = \frac{\rho_0 \cdot R^2}{4\epsilon_0} \left[2 \cdot \ln\left(\frac{r_W}{R}\right) + 1 \right] + U_0$$

Damit ergibt sich die Potentialdepression zwischen Wand und Strahlachse zu

$$\Delta U_W = U_W - U_0 = \frac{\rho_0 \cdot R^2}{4\epsilon_0} \left[2 \cdot \ln\left(\frac{r_W}{R}\right) + 1 \right]$$

und zwischen Strahlrand und Strahlachse zu $\Delta U = U(R) - U_0 = \frac{\rho_0 \cdot R^2}{4\epsilon_0}$

Wir die Geschwindigkeit der Teilchen nur wenig durch die Raumladung modifiziert, bleibt die Raumladungsdichte homogen und es gilt

$$j = \rho_0 \cdot v_z = \frac{I}{\pi \cdot R^2} \Rightarrow \rho_0 = \frac{I}{\pi \cdot R^2 v_s} = \frac{I}{\pi \cdot R^2 \sqrt{\frac{2qU_{acc}}{m}}}$$

U_{acc} = Beschleunigungsspannung für die Teilchen

Bei konstantem Strom variiert die Raumladungsdichte mit v_z und damit mit der Beschleunigungsspannung. Aufgrund der Potentialdepression variiert v_z und damit die Raumladungsdichte über den Querschnitt. Daher gilt die obige Betrachtung nur in Näherung. Es folgt damit:

$$\text{A: } r < R \quad U(r) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^2 \sqrt{\frac{2qU_{acc}}{m}}} + U_0$$

$$\text{B: } r > R \quad U(r) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{2qU_{acc}}{m}}} \left[2 \cdot \ln\left(\frac{r}{R}\right) + 1 \right] + U_0$$

Für eine genauere Betrachtung muss die Poissongleichung in Zylinderkoordinaten gelöst werden

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right) = \frac{I}{\pi\epsilon_0 R^2 \sqrt{\frac{2qU(r)}{m}}}$$

$$U(r) = \left(\frac{9}{16\pi\epsilon_0 \sqrt{\frac{2q}{m}}} \right)^{2/3} I^{2/3} \left(\frac{r}{R} \right)^{4/3}$$

Wird die Raumladung so groß, daß die Teilchen umkehren, so nennt man das die Ausbildung einer **virtuellen Kathode**. Dies gilt vor allem bei niedrigen Strahlenergien. Daher gibt es einen maximalen Strom der für eine bestimmte Beschleunigungsspannung U_{acc} transportiert werden kann. Für $r=R$ gilt

$$\frac{U^{3/2}}{I_{\max}} = \frac{9}{16\pi\epsilon_0\sqrt{\frac{2q}{m}}} = P_{\max}^{-1} \quad (\text{maximale Perveanz } P_{\max})$$

10.2. Raumladungseffekte – relativistisch

Für relativistische Strahlen (Ionen) gilt:

$$E(r) = \frac{\rho_0 \cdot r}{2\epsilon_0} \quad \text{mit} \quad \rho_0 = \frac{I}{\pi R^2 \beta \cdot c} = \frac{I}{\pi R^2 c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}}$$

Hochrelativistisch gilt: $\rho_0 = \frac{I}{\pi R^2 c}$

Das Eigenmagnetfeld folgt aus $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ oder $\int_0^{2\pi} B_\phi r d\phi = \mu_0 j \oint dF$

$$\Rightarrow 2\pi B_\phi r = \mu_0 j \pi \cdot r^2$$

$$\Rightarrow B_\phi(r) = \frac{\mu_0}{2} j \cdot r = \frac{\mu_0 \rho_0}{2} \beta c \cdot r$$

Die Raumladungskräfte hängen von der Geschwindigkeit der Teilchen ab. Neben einem elektrischen Feld erzeugt der Strahl auch ein azimuthales magnetisches Feld. Dieses erzeugt einen radialen Anteil der Lorentzkraft:

$$F_r(r) = q(E_r - vB_\phi) = q\left(\frac{\rho_0 \cdot r}{2\epsilon_0} - \frac{\mu_0 \rho_0}{2} v^2 \cdot r\right) = q \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (1 - \beta^2 c^2 \mu_0 \epsilon_0) \cdot r$$

Mit $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ folgt

$$F_r(r) = q \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (1 - \beta^2) \cdot r = \frac{q\rho_0}{2\epsilon_0 \gamma^2} \cdot r$$

D.h. die Raumladungsfokussierung ist ein nicht relativistischer Effekt. Das Eigenmagnetfeld kompensiert bei relativistischen Energien die abstoßenden elektrischen Kräfte. Im Falle von Raumladungskompensation ($f < 1$ – Grad der Kompensation) gilt

$$E(r) = \frac{\rho_0 \cdot r}{2\epsilon_0} (1 - f)$$

Und damit

$$F_r(r) = q \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (1 - f - \beta^2) \cdot r$$

D.h. die Wirkung kann sogar eine Nettofokussierung sein (relativistische Selbstfokussierung) durch die Raumladungskompensation.

Die Bewegungsgleichung in einer Drift lautet:

$$F_r(r) = m\gamma \cdot \ddot{r} = m\gamma(\beta c)^2 r'' = q \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (1 - f - \beta^2) \cdot r = \frac{q\rho_0}{2\epsilon_0\gamma^2} (1 - \gamma^2 f) \cdot r$$

$$r'' - \frac{q\rho_0}{2\epsilon_0 m (\beta c)^2 \gamma^3} (1 - \gamma^2 f) \cdot r = 0$$

$$\rho \cdot v = j = \frac{I}{\pi a^2} \Rightarrow \rho = \frac{I}{\beta c \pi a^2} \quad \text{wobei } a = \text{Strahlradius}$$

Wir führen nun den charakteristischen Strom (Alfvén Strom) ein

$$I_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3}{q} = \frac{1}{30} \frac{mc^2}{q}$$

Für Elektronen gilt $I_0 = 17045 \text{ A}$

Für Ionen gilt $I_0 = 3 \cdot 10^7 \cdot A/q \text{ A}$

$$r'' - \frac{q \cdot I}{2\pi\epsilon_0 m c^3 \beta^3 \gamma^3 a^2} (1 - \gamma^2 f) \cdot r = 0$$

$$r'' - \frac{2I}{I_0 \beta^3 \gamma^3 a^2} (1 - \gamma^2 f) \cdot r = 0$$

Der charakteristische Strom wird dann verwendet, wenn man die Raumladungsdichte ρ_0 durch den Strahlstrom ausdrückt. (Alfvén, H., Phys. Rev. 55 (1939) 425)

Da dieser Strom u.a. eine quasi Normierung des Raumladungspotentials darstellt, hat Lawson 1958 die generalisierte Perveanz eingeführt mit

$$K = \frac{2I}{I_0 \beta^3 \gamma^3} (1 - \gamma^2 f) \quad (*)$$

(J. D. Lawson, J. Electron Control, 5 (1958) 146)

Damit folgt in einer Drift

$$r'' - \frac{K}{a^2} r = 0$$

Die Raumladung wirkt sich kontinuierlich defokussierend aus, wenn der Strahl nicht teilkompensiert ist. Die Defokussierungsstärke pro Längeneinheit ist $-K/a^2$. In Verbindung mit einer Quadrupollinse würde man folgende Hillsche DGL erhalten:

$$x'' + k_x x - \frac{K}{a^2} x = 0 \quad \text{und} \quad y'' + k_y y - \frac{K}{a^2} y = 0$$

wobei $k_x = -k_y = k = \frac{g}{B \cdot \rho} = \frac{\text{Gradient}}{\text{magnetische Steifigkeit}}$ ist.

Man erkennt, daß die Raumladungskraft, wie eine zusätzliche Quadrupollinse wirkt. Dadurch ändert sich die $\beta(s)$ -Funktion, was einen entsprechenden tune shift nach sich zieht (siehe Vorlesung zu Resonanzen). Dieser tune shift ($\Delta Q_x, \Delta Q_y$) kann nahe an Resonanzen herantreiben, womit die maximale Größe des tune shifts begrenzt wird und damit ein Raumladungslimit existiert.

Die Raumladung stellt also eine Störung der Fokussierstärke von $\delta k = -\frac{K}{a^2}$ dar.

$$\Delta Q = \frac{1}{4\pi} \oint \beta(\bar{s}) \delta k(\bar{s}) d\bar{s} = -\frac{K}{4\pi a^2} C \beta_0$$

Dies ist der tune shift in **smooth approximation**, d.h. mit einer mittleren β -Funktion (β_0) und dem mittleren Strahlradius a .

Für diesen gilt $a = \sqrt{\varepsilon \cdot \beta_0}$

Damit folgt

$$\Delta Q = -\frac{K}{2\varepsilon} \frac{C}{2\pi}$$

Setzt man nun K aus (*) ein, so erhält man

$$\Delta Q = -\frac{I}{I_0 \varepsilon \beta^3 \gamma^3} (1 - \gamma^2 f) \frac{C}{2\pi}$$

Bei einem Strahl der longitudinal gebuncht wird, ist der momentane Strom innerhalb des Teilchenpaketes größer als der mittlere Strom der umlaufenden Teilchen I, nämlich

$$\frac{I}{B_f} \quad \text{mit} \quad 0 < B_f \leq 1.$$

In der obigen Gleichung erkennt man die wesentlichen Abhängigkeiten des tune shifts durch die Raumladung:

$$\Delta Q \propto I, \quad \Delta Q \propto C, \quad \Delta Q \propto \frac{1}{\varepsilon \beta^3 \gamma^3} = \frac{1}{\varepsilon_n \beta^2 \gamma^2} \quad \text{und damit} \quad \Delta Q \propto \frac{1}{\varepsilon_n p^2} \quad \text{mit} \quad p = m_0 \beta \gamma c$$

Die Raumladungskräfte führen jedoch nicht nur zu einer Verschiebung, sondern auch zu einer Verschmierung des Arbeitspunktes (**tune spread**). Die Teilchen an verschiedenen Stellen im Strahl sehen unterschiedliche Raumladungskräfte und haben damit auch unterschiedliche ΔQ . Aufgrund der Verschiebung können die Teilchen in Resonanzen getrieben werden.

Daher sollte man ein $\Delta Q_{max} = -0.25$ nicht überschreiten.

Allgemein erhält man für ein spezifisches ΔQ_{max} einen maximalen Strom

$$I_{max} = -\Delta Q_{max} \cdot B_f I_0 \epsilon \beta^3 \gamma^3 \frac{2\pi}{C} \quad \text{wenn die Raumladungskompensation } f = 0 \text{ ist.}$$

Die maximale Teilchenzahl ist dann:

$$I_{max} = qeN_{Teilchen} \frac{1}{f_u} = qeN_{Teilchen} \frac{\beta \cdot c}{C}$$

$$N_{max} = -\Delta Q_{max} \cdot B_f I_0 \epsilon \beta^3 \gamma^3 \frac{2\pi}{q \cdot e \cdot c}$$

Die Raumladungsgrenze ergibt sich aus dem niedrigsten Impuls $\sim \beta\gamma$, d.h. dem Impuls bei Injektion in den Beschleuniger.

Wir haben uns bisher auf die Einzelteilchendynamik konzentriert. Wenn wir eine Teilchenverteilung betrachten, dann interessiert die äußere Begrenzung des Strahls, die Enveloppe. Die entsprechende Bewegungsgleichung kann man direkt aus der Lorentzkraft ableiten (Randstrahlgleichung, Paraxialgleichung). Ein anderer Zugang ist von Wangler aufgezeigt und zwar über die Hillsche DGL.

$$x'' + k_x x - \frac{K}{a^2} x = x'' + k_x x - F_{sc} = 0$$

Wir schauen uns nun die Bewegungsgleichung für die zweiten Momente (RMS-Werte) an

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad , \quad \overline{xx'} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i' \quad , \quad \overline{x'^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i'^2$$

$$\mathcal{E}_{RMS}^2 = \overline{x^2} \cdot \overline{x'^2} - \overline{xx'}$$

$$\frac{d}{ds} \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{d}{ds} (x_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2x_i x_i' = 2\overline{xx'}$$

$$\frac{d}{ds} \overline{xx'} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{d}{ds} (x_i x_i') = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i' x_i' + x_i x_i'') = \overline{x_i'^2} + \overline{xx''}$$

$$\frac{d}{ds} \overline{x'^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2x_i' x_i'' = 2\overline{x'x''}$$

Wenn wir die RMS-Strahlgröße $a = \sqrt{\overline{x^2}}$ nutzen, dann erhalten wir

$$\frac{da^2}{ds} = 2aa' = \frac{d}{ds} (\overline{x^2}) = 2\overline{xx'} \quad \Rightarrow \quad aa' = \overline{xx'}$$

$$\frac{d}{ds}(aa') = a'^2 + aa'' = \overline{x'^2} + \overline{xx''} \quad \Rightarrow \quad a'' + \frac{a'^2 - \overline{x'^2}}{a} - \frac{\overline{xx''}}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a'' + \frac{a'^2 - \overline{x'^2}}{a} - \frac{\overline{x(-k_x x + F_{sc})}}{a} = 0$$

$$a'' + \frac{a'^2 - \overline{x'^2}}{a} - k_x a - \frac{\overline{xF_{sc}}}{a} = a'' + \frac{a^2 a'^2 - a^2 \overline{x'^2}}{a^3} - k_x a - \frac{\overline{xF_{sc}}}{a} = 0$$

$$a'' - \frac{\mathcal{E}_x}{a^3} + k_x a - \frac{\overline{xF_{sc}}}{a} = 0 \quad (**)$$

Diese RMS-Enveloppengleichung gibt die Bewegung der Enveloppe vor. Der Term $\frac{\mathcal{E}_x}{a^3}$ ist der Emittanzterm und dieser ist negativ da er repulsiv ist. Dagegen ist der Fokussierterm $k_x a$ positiv. Der letzte Term $\frac{\overline{xF_{sc}}}{a}$ ist repulsiv, da er die Raumladung repräsentiert. Die Bewegungsgleichung (**) ist der Einzelteilchenbewegung sehr ähnlich, mit der Ausnahme des Emittanzterms.

$$\overline{x F_{sc}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{K}{a^2} x_i = \frac{K}{a^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{K}{a^2} \overline{x^2} = K$$

$$a'' + k_x a - \frac{\epsilon_x}{a^3} - \frac{K}{a} = 0$$

Wir haben jetzt den Anteil des Raumladungseffektes behandelt, der durch die Raumladungsfelder hervorgerufen wird. Diese führen zum kohärenten tune shift, vor allem bei niedrigen Energien. Weitere Beiträge zum Kraftterm in der Hillschen DGL werden hervorgerufen durch

- Lokale Spiegelladungen und deren Felder (inkohärenter und kohärenter tune shift)
- Wake Felder (kohärente transversale Instabilitäten)

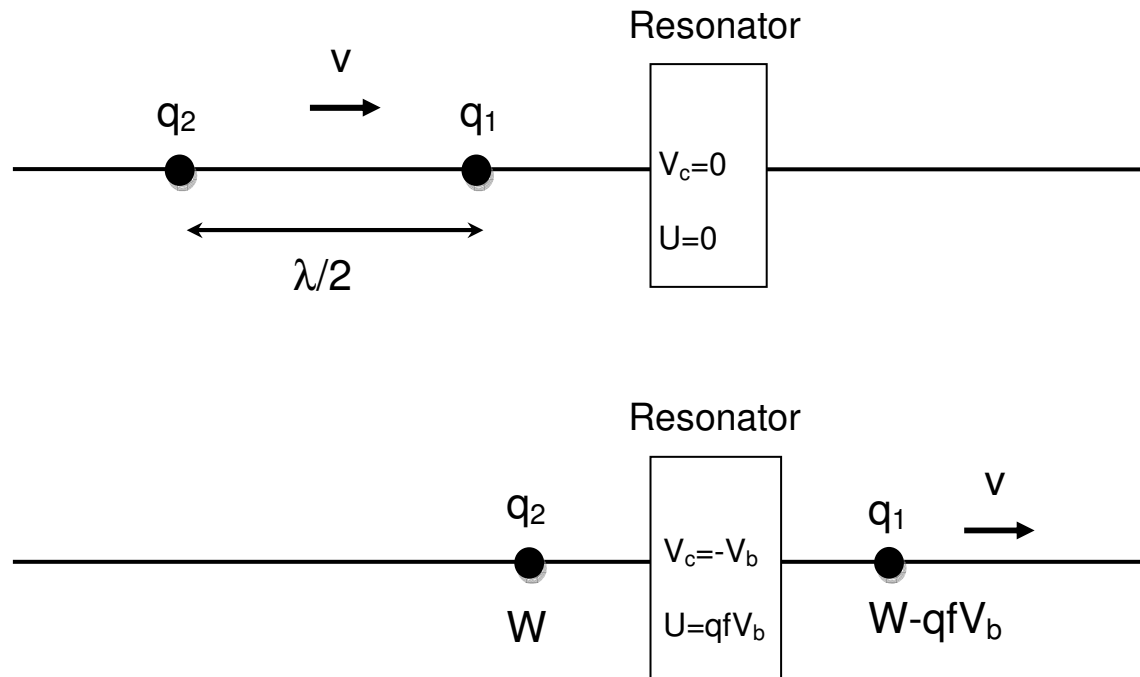
10.3. *Beam Loading*

Der Strahl ist nicht nur einfach ein Medium, welches HF-Energie absorbiert und damit eine resistive Last darstellt. Der Strahl ist äquivalent zu einem Generator, der entweder Energie aus der Kavität ziehen oder Energie an die Kavität abgeben kann.

Bisher haben wir den Einfluss des Strahls auf den Resonator vernachlässigt. Der Effekt des Strahls auf den Resonator wird **beam loading** genannt. Physikalisch sind dies Spiegelladungseffekte und die

Einflüsse der mitlaufenden elektromagnetischen Felder. Die dadurch induzierten Felder wirken auf die Strahlteilchen zurück.

Durch den Strahl können auch Moden des Resonators von höherer Ordnung angeregt werden
 → higher-order-mode power losses + beam break-up instability



In der obigen Darstellung ist U die im Resonator gespeicherte Energie und V die Spannung im Resonator. Die strahlinduzierte Spannung im Resonator ist $V_c = -V_b$, wobei das Teilchen 1 die

Energie $\Delta W = -q \cdot f \cdot V_b = \alpha V_b^2$ an den Resonator abgibt, da es nur der Teil $f \cdot V_b$ der Spannung sieht. Die Spannung im Resonator ist dann

$$V_b = \frac{q \cdot f}{\alpha}$$

Die Ladung q_2 erreicht den Resonator, wenn sich die Phase der Resonatorspannung um π geändert hat. Diese Ladung nimmt die Energie U wieder auf, so dass $V_c = 0$ wird nach dem Durchgang der Ladung.

$$\Delta W_1 + \Delta W_2 = 0$$

$$\Delta W_2 = q_2 V_b - q_2 f \cdot V_b = (1 - f) q \cdot V_b \quad \text{wenn } q_1 = q_2$$

$$\Rightarrow (1 - f) q \cdot V_b - q \cdot f \cdot V_b = (1 - 2f) q \cdot V_b = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2}$$

$$\Delta W_1 = -\frac{q}{2} V_b \quad \Rightarrow \quad V_{q1} = -\frac{1}{2} V_b$$

Die induzierte Spannung, welche die erste Ladung sieht, ist die Hälfte der induzierten Spannung im verlustfreien Resonator. Dies ist das Fundamentaltheorem des beam loadings. Der Verlustparameter ist

$$k = \frac{1}{4\alpha} \quad \Rightarrow \quad U = \alpha \cdot V_b^2 = \alpha \cdot \frac{q^2}{4\alpha^2} = \frac{q^2}{4\alpha} = k \cdot q^2$$

Die induzierte Spannung ist $V_b = \frac{q}{2\alpha} = 2k \cdot q \Rightarrow U = \frac{V_b^2}{4k} \Leftrightarrow k = \frac{V_b^2}{4U}$

Die effektive Shuntimpedanz ist nun $Z_{eff} = \frac{V_b^2}{P} = \frac{(V_0 T)^2}{P}$

Mit der unbelasteten Güte $Q_0 = \frac{\omega \cdot U}{P}$ erhält man $k = \frac{V_b^2}{4U} = \frac{Z_{eff} \cdot P}{4U} = \frac{Z_{eff} \cdot \omega}{4Q_0}$

Die strahlinduzierte Spannung V_b ist um 180° ggü. der Beschleunigungsspannung phasenverschoben, wenn der Resonator abgestimmt ist.