

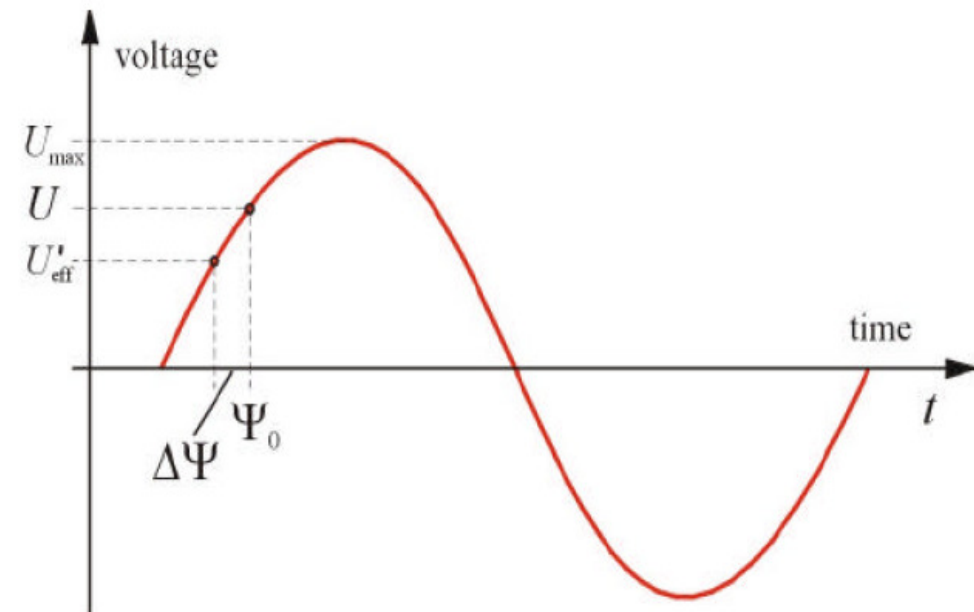
## 8.) Longitudinale Strahldynamik

Nun betrachten wir den longitudinalen Teil der Strahldynamik. Hier kommt es auf die Synchronisation der Teilchen mit dem beschleunigenden HF-Feld an.

### Synchrotronschwingung

Die Phasenfokussierung ist nur möglich, wenn die Kreisfrequenz  $\omega_s$  mit der die Teilchen umlaufen, vom Impuls  $p$  abhängt.

Bei der angezeigten Phasenlage werden die Teilchen, welche zu früh in den Spalt eintreten weniger beschleunigt, als die, die zu spät in diesen eintreten. Da die ersten Teilchen die schnellsten sind und die späteren Teilchen die langsamsten, wird der Puls zusammengehalten.



Wie wir schon gesehen haben gilt im Ringbeschleuniger

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_s} = \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2} \right) \frac{\Delta p}{p_0} = \eta \frac{\Delta p}{p_s}$$

Über eine Umdrehung variiert die HF-Phase  $\phi$  um  $h \cdot 2\pi$  und der Umlaufwinkel  $\theta$  um  $2\pi$ .

$$\Rightarrow \Delta\phi = -h \cdot \Delta\theta$$

Das negative Zeichen kommt daher, dass ein Teilchen hinter dem synchronen Teilchen ( $\Delta\theta < 0$ ) zeitlich später im gap ankommt ( $\Delta t > 0$ ,  $\Delta\phi > 0$ )

$$\Delta\omega_s = \frac{d}{dt} \Delta\theta = -\frac{1}{h} \frac{d}{dt} \Delta\phi = \omega_s \eta_s \cdot \frac{\Delta p}{p_s}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta\phi = -h \cdot \omega_s \eta_s \cdot \frac{\Delta p}{p_s} = -\frac{h \cdot \omega_s \eta_s}{\beta^2} \frac{\Delta E}{E_s}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Delta\phi = -\frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{\beta^2 E_s} \left( \frac{\Delta E}{\omega_s} \right) \quad (*)$$

Es gilt außerdem:

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c\beta} = \frac{qU_{eff}}{\beta c} \sin \varphi_s = \frac{qU_{eff}}{R \cdot \omega} \sin \varphi_s$$

Die Änderung des Impulses pro Sekunde ist dann

$$\dot{p} = \frac{\Delta p}{T_C} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{qU_{eff}}{R \cdot \omega} \sin \varphi_s \quad \Rightarrow \quad R_s \cdot \dot{p}_s = \frac{q}{2\pi} U_{eff} \sin \varphi_s$$

Die Differenz zum Synchroneteilchen ist dann

$$R \cdot \dot{p} - R_s \cdot \dot{p}_s = \frac{q}{2\pi} U_{eff} (\sin \phi - \sin \varphi_s)$$

Entwickeln wir die linke Seite erhalten wir  $R \cdot \dot{p} - R_s \cdot \dot{p}_s \approx \frac{d}{dt} (R \cdot \Delta p) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega} \right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega} \right) = \frac{q}{2\pi} U_{eff} (\sin \phi - \sin \varphi_s) \quad (**)$$

Man kann (\*) und (\*\*) auch zusammenfassen zu

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta \phi = - \frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{\beta^2 E_s} \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega_s} \right) = - \frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{\beta^2 E_s} \frac{q U_{eff}}{2\pi} (\sin \phi - \sin \varphi_s) \quad (***)$$

Wir entwickeln zunächst für kleine  $\Delta\phi$  ( $\Delta\phi = \phi - \phi_s$ ):  $\sin \phi - \sin \phi_s = \cos \phi_s \cdot \Delta\phi$

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta\phi = -\frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{\beta^2 E_s} \frac{qU_{eff}}{2\pi} \cos \phi_s \cdot \Delta\phi = -\omega_{syn}^2 \cdot \Delta\phi$$

Für kleine Abweichungen von der Sollphase vollführen die Teilchen eine harmonische Schwingung, die sogenannte **Synchrotronschwingung**. Die Synchrotronfrequenz beträgt dabei

$$\omega_{syn} = \omega_s \sqrt{\frac{h \cdot \eta_s}{2\pi \beta^2 E_s} qU_{eff} \cos \phi_s}$$

Die Frequenz der Synchrotronschwingungen,  $\nu_{syn} = \omega_{syn}/2\pi$ , ist im Vergleich zur Umlauffrequenz  $\nu_s = \omega_s/2\pi$  des synchronen Teilchens sehr klein. Für die Zahl der Synchrotronschwingungen pro Umlauf, den longitudinalen Tune, erhalten wir

$$Q_{syn} = \frac{\omega_{syn}}{\omega_s} = \sqrt{\frac{h \cdot \eta_s}{2\pi \beta^2 E_s} qU_{eff} \cos \phi_s}$$

Als Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta\phi + \omega_{syn}^2 \cdot \Delta\phi = 0$$

können wir

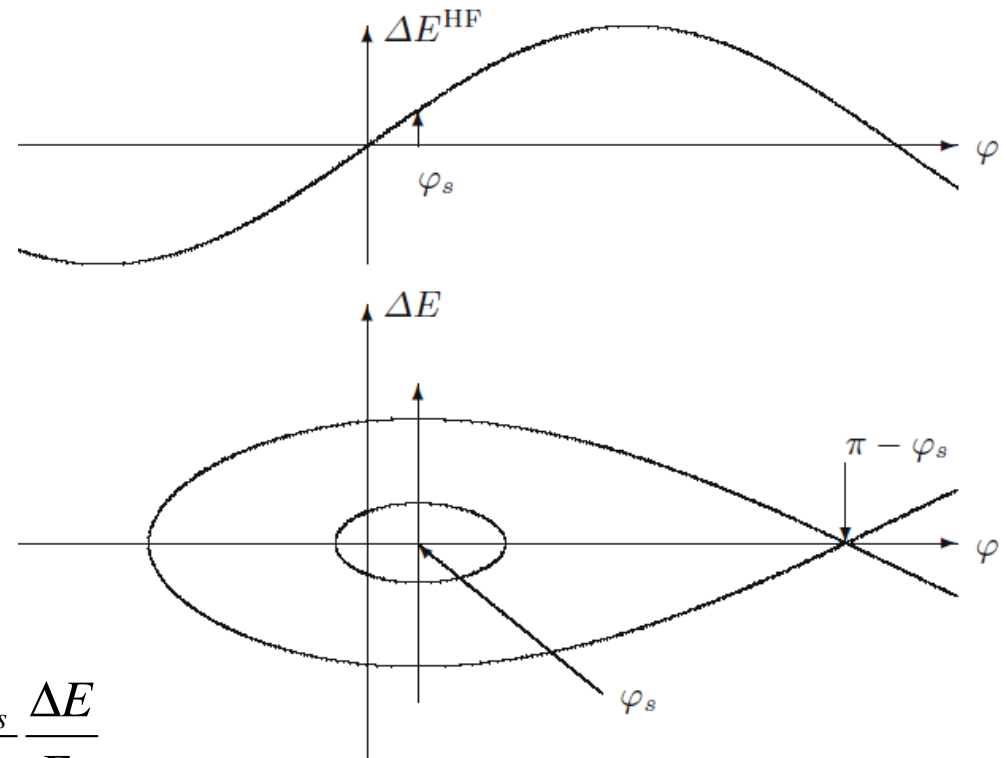
$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\max} \cos(\omega_{syn} \cdot t)$$

ansetzen. In (\*) eingesetzt erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \Delta\phi = -\Delta\phi_{\max} \cdot \omega_{syn} \sin(\omega_{syn} \cdot t) = -\frac{h \cdot \omega_s \eta_s}{\beta^2} \frac{\Delta E}{E_s}$$

$$\Delta E = \frac{\omega_{syn} \beta^2 E_s}{\omega_s h \cdot \eta_s} \Delta\phi_{\max} \cdot \sin(\omega_{syn} \cdot t) = \Delta E_{\max} \sin(\omega_{syn} \cdot t)$$

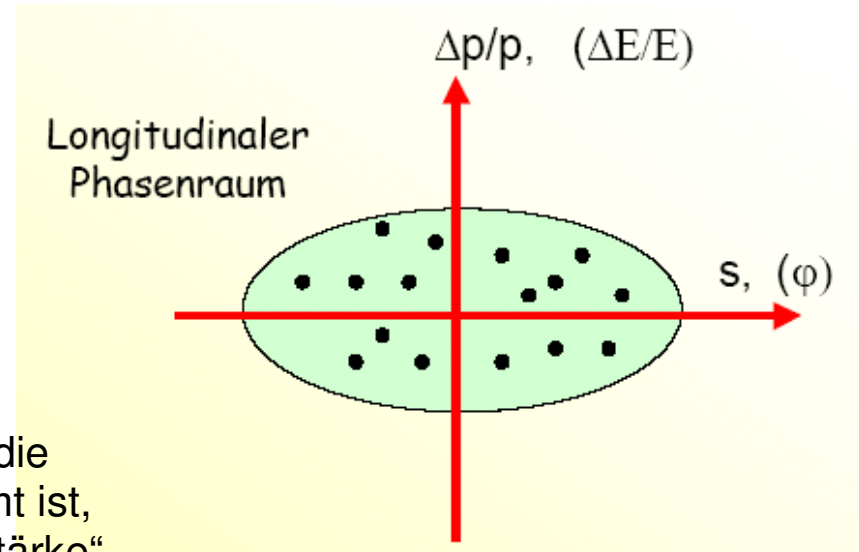
$$\Delta E_{\max} = \frac{\omega_{syn} \beta^2 E_s}{\omega_s h \cdot \eta_s} \Delta\phi_{\max} = Q_{syn} \frac{\beta^2 E_s}{h \cdot \eta_s} \Delta\phi_{\max} \quad \text{mit} \quad \beta^2 E_s = pc\beta = p \cdot v$$



Damit erhält man die Koordinatendarstellung der longitudinalen Emittanzellipse:

$$\left( \frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\max}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta E}{\Delta E_{\max}} \right)^2 = 1$$

Es ist interessant, die Synchrotronschwingung im Hinblick auf das Zusammenspiel der Parameter zu diskutieren. Bei einer vorgegebenen Lattice-Struktur des Synchrotrons und einem vorgegebenen Teilchenimpuls  $p_s$  sind die Größen  $\eta_s$ ,  $\omega_s$  und  $v_s$  festgelegt. Der Energiegewinn pro Umlauf, der durch die Hochfahrgeschwindigkeit der Ablenkmagnete bestimmt ist, legt das Produkt  $qU_{\text{eff}} \sin\phi_s$  fest. Die "Fokussierungsstärke" in der Schwingungsgleichung, d. h.  $\omega_{\text{syn}}^2$ , ist durch das Produkt  $qU_{\text{eff}} \cos\phi_s$  festgelegt. Um bei einer vorgegebenen longitudinalen Emittanz von  $\Delta\phi_{\max}\Delta E_{\max}$  die Phasenbreite  $\Delta\phi$  klein, d. h. im linearen Bereich der Sinuskurve, zu halten, sollte die Spannungsamplitude  $U_{\text{eff}}$  möglichst groß und  $\sin\phi_s$  möglichst klein gewählt werden.



Eine wichtige Voraussetzung für die Existenz von stabilen Lösungen und das Auftreten von Synchrotronschwingungen ist die Bedingung  $\eta_s \cdot \cos\phi_s > 0$

$$\cos\phi_s > 0 \text{ für } \eta_s > 0 \quad (\gamma_s < \gamma_{\text{tr}})$$

$$\cos\phi_s < 0 \text{ für } \eta_s < 0 \quad (\gamma_s > \gamma_{\text{tr}})$$

Daher wir bei der HF beim Überqueren von  $\gamma_{tr}$  eine Phasensprung von  $180^\circ$  erforderlich.

### **Synchrotronschwingung - Separatrix**

Bei größeren Schwingungsamplituden  $\Delta\phi$  verliert die lineare Näherung für kleine  $\Delta\phi$  ihre Berechtigung. Daher müssen wir nun die nichtlineare Differenzialgleichung lösen.

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta\phi + \frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{\beta^2 E_s} \frac{qU_{eff}}{2\pi} (\sin \phi - \sin \varphi_s) = \frac{d^2}{dt^2} \Delta\phi + \frac{\omega_{syn}^2}{\cos \varphi_s} (\sin \phi - \sin \varphi_s) = 0$$

Durch Multiplikation mit  $\frac{d}{dt} \Delta\phi$  und Integration erhält man

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \Delta\phi \right)^2 + \frac{\omega_{syn}^2}{\cos \varphi_s} [ -(\cos \phi - \cos \varphi_s) - \sin \varphi_s \cdot \Delta\phi ] = const.$$

$$\left( \frac{\frac{d}{dt} \Delta\phi}{\omega_{syn}} \right)^2 - 2 \frac{(\cos \phi - \cos \varphi_s) + \sin \varphi_s \cdot \Delta\phi}{\cos \varphi_s} = K_0 \quad \text{wobei} \quad \frac{\frac{d}{dt} \Delta\phi}{\omega_{syn}} = - \frac{h \cdot \omega_s \eta_s}{\beta^2 E_s \omega_{syn}} \Delta E \sim \Delta E \quad \text{ist.}$$

Für kleine Werte von  $K_0$  in erhalten wir die ellipsenförmigen Trajektorien im longitudinalen Phasenraum, die wir bereits in 9.1 abgeleitet haben. Für größere Werte werden die Ellipsen fischähnlich deformiert. Die Grenzlinie zwischen dem stabilen und dem instabilen Bereich wird durch die sogenannte **Separatrix** markiert.

Die Amplitude einer Synchrotronschwingung ist durch die beiden Umkehrpunkte der Schwingung, d. h. die Extremwerte  $\phi_1$  und  $\phi_2$ , gekennzeichnet.

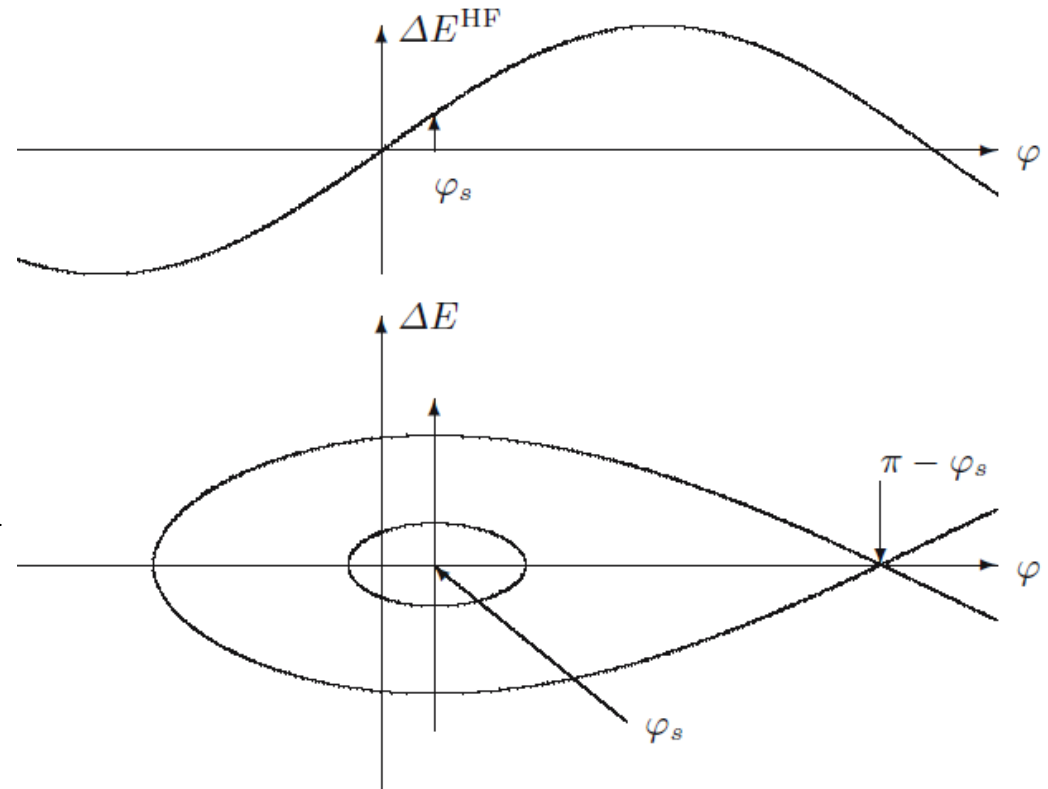
Diese Extremwerte erhält man durch

$$\frac{d}{dt} \Delta\phi = 0$$

$$K_0 = -2 \frac{\cos \phi_{1,2} - \cos \varphi_s + \sin \varphi_s \cdot (\phi_{1,2} - \varphi_s)}{\cos \varphi_s}$$

Die Separatrix gibt die maximal mögliche Energieabweichung  $\Delta E_{\max}$  vor und markiert damit die Energieakzeptanz.

Eine größere Abweichung  $\Delta\phi$  als  $\pi - \varphi_s$  kann es nicht geben, sonst gerät das Teilchen in die negative Halbwelle. Daher ist  $\phi_1 = \pi - \varphi_s$  und damit ergibt sich  $K_0$  und damit auch aus der obigen Gleichung  $\phi_2$ .





$$K_0 = -2 \frac{\cos(\pi - \varphi_s) - \cos \varphi_s + \sin \varphi_s \cdot (\pi - 2\varphi_s)}{\cos \varphi_s} = 4 - (2\pi - 4\varphi_s) \tan \varphi_s$$

und damit

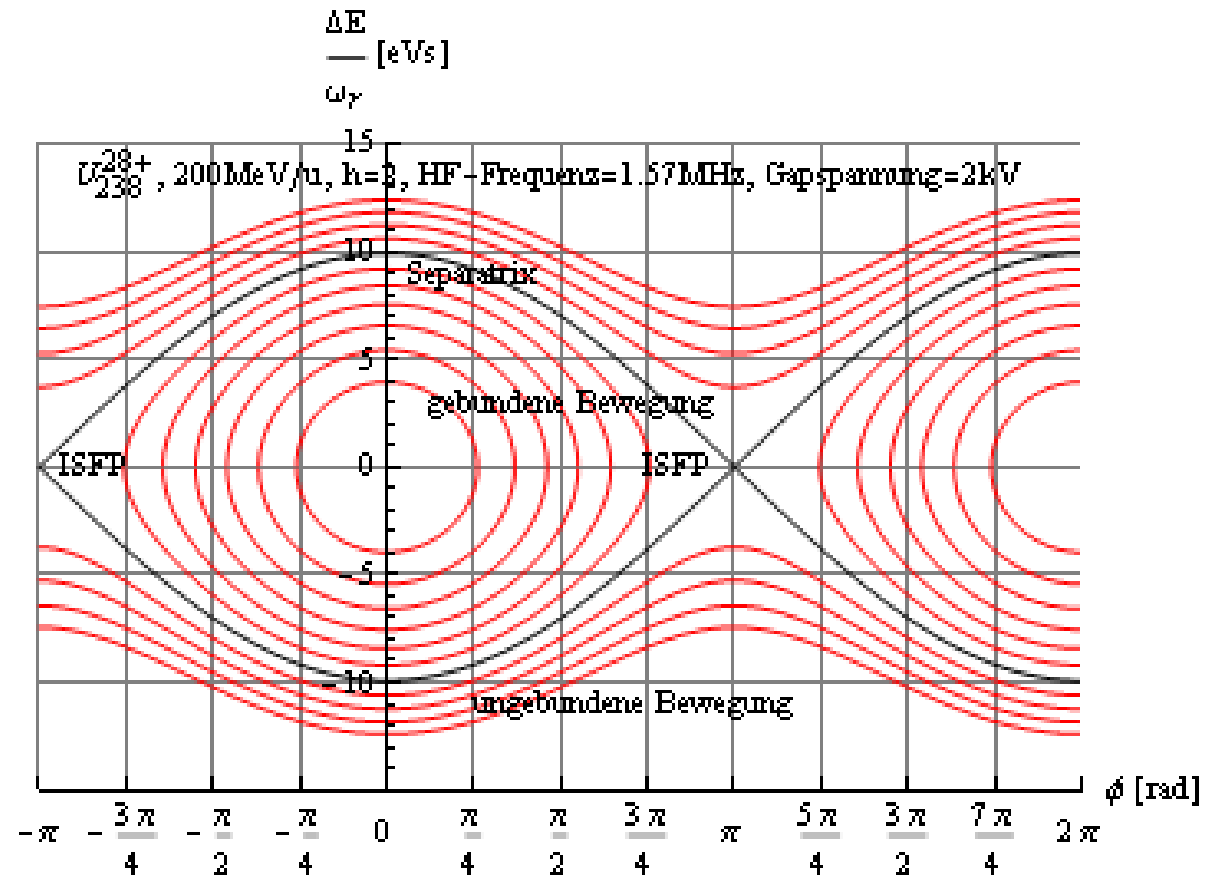
$$\cos \phi_2 - \cos \varphi_s + \sin \varphi_s \cdot (\phi_2 - \varphi_s) = \frac{\cos \varphi_s}{-2} [4 - (2\pi - 4\varphi_s) \tan \varphi_s]$$

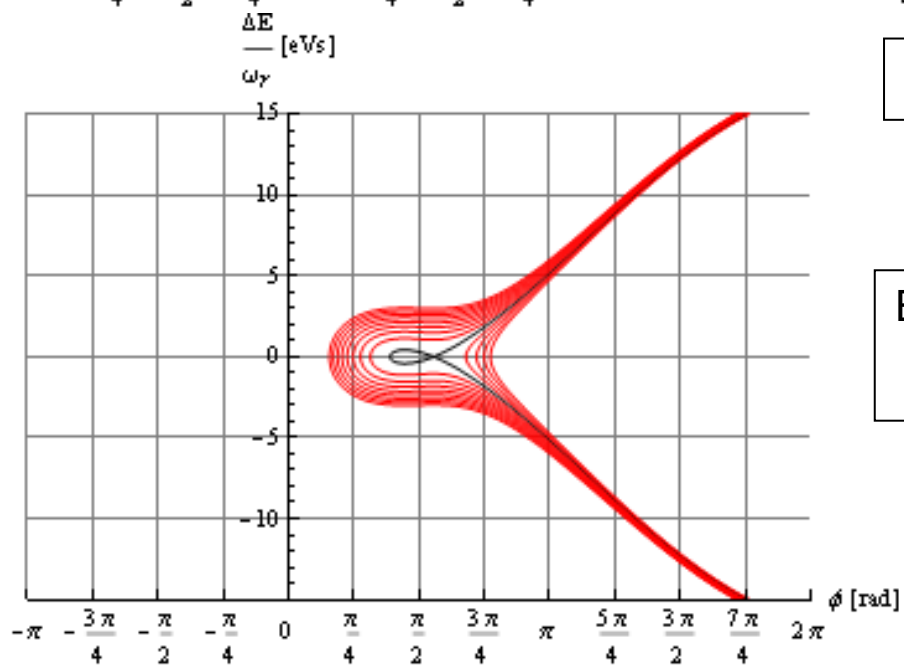
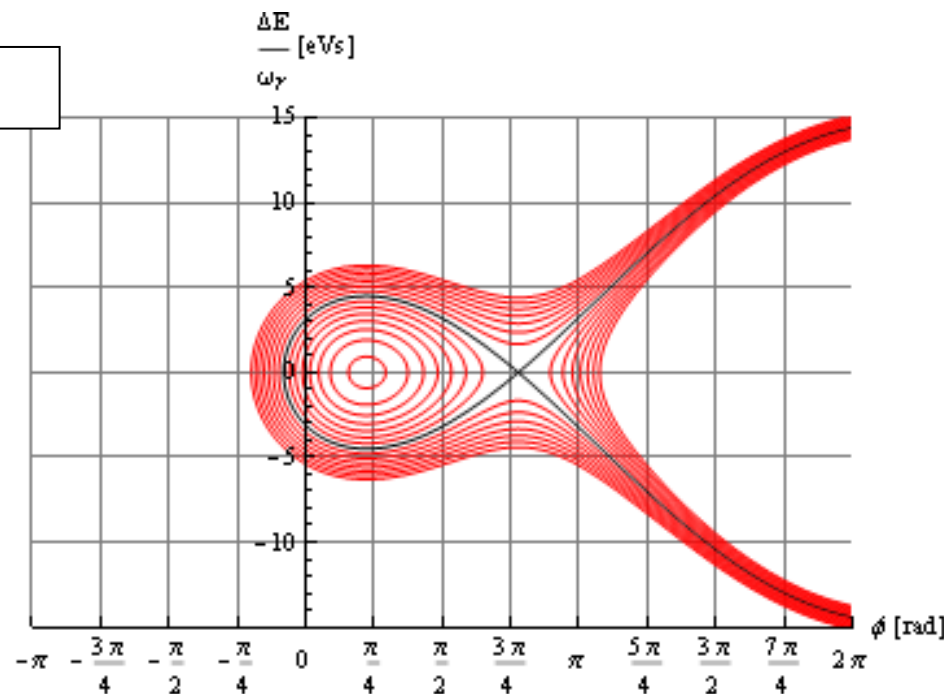
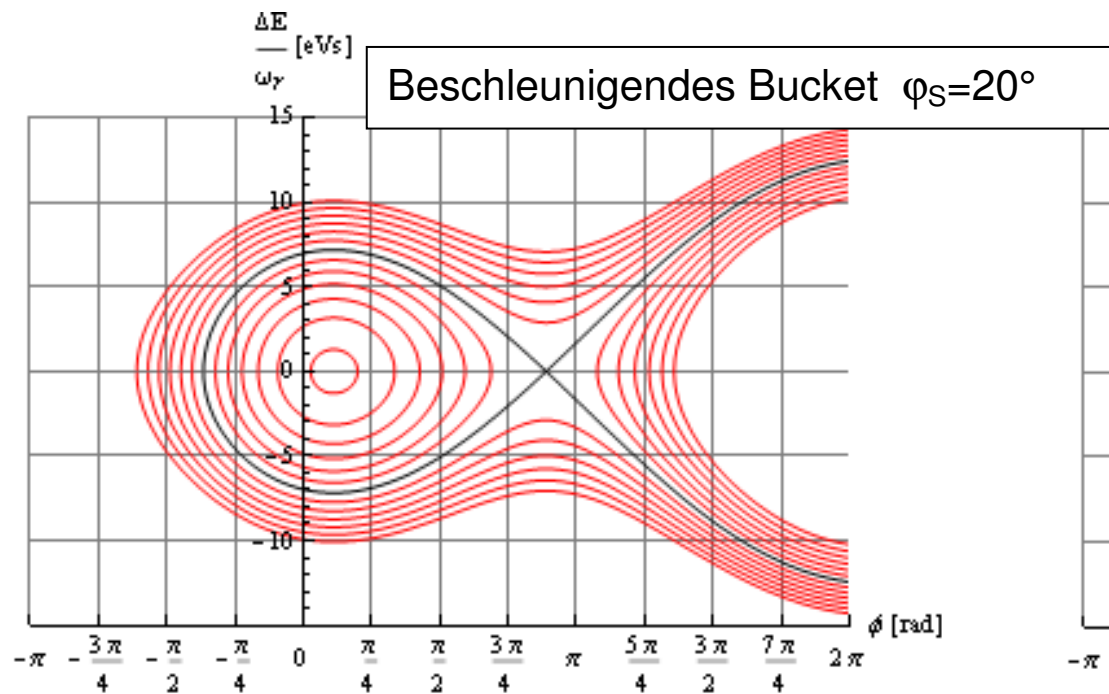
$$\begin{aligned} &\cos \phi_2 + \sin \varphi_s \cdot \phi_2 \\ &= (\pi - \varphi_s) \sin \varphi_s - \cos \varphi_s \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \varphi_s = 0 &\Rightarrow \phi_1 = \pi \\ \Rightarrow \cos \phi_2 &= -\cos 0 \\ \Rightarrow \phi_2 &= -\pi \end{aligned}$$

Die Kreisfrequenz für große Amplituden  $\Omega_{\text{syn}}$  wird umso kleiner, je größer die Amplituden sind, d.h. je größer  $\phi_1 - \phi_2$  ist.





## Longitudinale Emittanz

In der  $\Delta\phi$ ,  $\Delta E$  Phasenraumebene folgen die Teilchenbewegungen einer Hamiltonfunktion

$$H(\phi, W) = \frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{2\beta^2 E_s} W^2 - \frac{qU_{eff}}{2\pi} [\cos \phi - \cos \varphi_s + \sin \varphi_s (\phi - \varphi_s)] \quad \text{mit} \quad W = \frac{\Delta E}{\omega_s}$$

Daher ist nach Liouville die von den Teilchen besetzte Phasenraumfläche konstant. Ist die Fläche konstant klein ggü. der Separatrix, dann kann auch diese durch eine Ellipse umrandet werden.

$$A_{\phi, E} = \pi \cdot \varepsilon_{long} = \pi \cdot \Delta\varphi_0 \Delta E_0$$

Zur Beschreibung der Teilchenbewegung longitudinal werden neben  $\Delta\phi$  und  $\Delta E$  auch gerne andere Koordinaten verwendet.

$$l = -\frac{v_s}{\omega_{HF}} \Delta\phi = -\frac{v_s}{h\omega_s} \Delta\phi = -\frac{C_s}{h \cdot 2\pi} \Delta\phi$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega_{HF}} = \frac{\Delta\phi}{h\omega_s} \quad \text{und} \quad \Delta E = v_s \Delta p$$

In Analogie zur transversalen Emittanz wird meistens die Ortsabweichung und die relative Impulsabweichung  $\delta = \Delta p/p_s$  betrachtet.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta E}{\Delta E_{\max}}\right)^2 = 1 &\Rightarrow \left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\delta_{\max}}\right)^2 = 1 \\ \Rightarrow \left(\frac{\delta_{\max}}{l_{\max}}\right)l^2 + \left(\frac{l_{\max}}{\delta_{\max}}\right)\delta^2 = l_{\max} \cdot \delta_{\max} &\Rightarrow \frac{l^2}{\beta_{\text{long}}} + \beta_{\text{long}}\delta^2 = \varepsilon_{\text{long}} \end{aligned}$$

Die Maschinenellipse in longitudinale Richtung ist aufrecht  $\alpha_{\text{long}} = 0$ . Die Betafunktion ist

$$\beta_{\text{long}} = \left| \frac{l_{\max}}{\delta_{\max}} \right| = \frac{C_s}{h \cdot 2\pi} \Delta\phi_{\max} \frac{p_s}{\Delta p_{\max}} = \frac{C_s}{h \cdot 2\pi} \cdot \frac{p_s v_s}{\Delta E_{\max}} \Delta\phi_{\max} = \frac{\eta_s C_s}{2\pi \cdot Q_{\text{syn}}}$$

$$\beta_{\text{long}} = \frac{\eta_s C_s}{2\pi \cdot Q_{\text{syn}}} = C_s \sqrt{\frac{\eta_s \beta^2 E}{2\pi \cdot h q U_{\text{eff}} \cos \varphi_s}}$$

$\beta_{\text{long}}$  ist proportional zum Maschinenumfang und antiproportional zur Zahl der Synchrotronschwingungen pro Umlauf. Ist  $\beta_{\text{long}}$  klein dann ist die Phasenfokussierung stark.