6.) Dispersion und Resonanzen

Die transversalen Bewegungsgleichungen in linearer Näherung in einem Beschleuniger haben wir abgeleitet zu

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho} - k(s)\right) \cdot x = h(s) \cdot \delta \qquad mit \qquad h(s) = \frac{1}{\rho(s)} \quad ; \quad \delta = \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$y'' + k(s) \cdot y = 0$$

Man kann nun die beiden Gleichungen in Hillsche-DGLs umwandeln, indem man folgende Beziehungen nutzt:

$$k_x(s) = k_m^2(s) + \frac{1}{\rho^2(s)} \quad ; \quad k_y(s) = -k_m^2(s)$$

➔ $$x'' + k_x(s) \cdot x = h \cdot \delta \quad , \quad y'' + k_y(s) \cdot y = 0$$

Für die allgemeine Lösung für monoenergetische Teilchen ($\delta = 0$) erhalten wir homogene DGLs, deren Lösungen wir durch cosinus- und sinusartige Funktionen ermitteln konnten. Daraus haben wir die lineare Strahloptik abgeleitet:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} c(z) & s(z) \\ c'(z) & s'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s0}$$

Beispiele für Quadrupole und dünne Linsen wurden gezeigt. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $x'' + k_x(s) \cdot x = h \cdot \delta$ lässt sich als Linearkombination einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL $x_D(s) = D(s) \cdot \delta$ mit der allgemeinen Lösung der homogenen DGL schreiben, wobei x(s) die normale Betatronschwingung ist, also die Lösung der homogenen Hillschen DGL darstellt:

$$x_\delta(s) = x_D(s) + x(s)$$

$$x_\delta'' + k_x \cdot x_\delta = h \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad x'' + x_D'' + k_x x + k_x x_s = h \cdot \delta$$

Da $x'' + k_x x = 0$ ergibt sich $x_D'' + k_x x_D = h \cdot \delta$ und somit

$$D'' \delta + k_x D \delta = h \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad D''(s) + k_x(s) D(s) = h(s)$$

D(s) wird auch Dispersionsfunktion genannt. Die Dispersion beschreibt den Einfluss einer Impulsabweichung auf den Ort und den Winkel in transversale Richtung:

$$D_x(s)\delta_0 = x_D \quad , \quad D_x'(s)\delta_0 = x_D'$$

Die Lösung der homogenen DGL ergibt sich aus $D_h(s) = D_0 \cdot C(s) + D_0' \cdot S(s)$. Zusammen mit der partikulären Lösung der inhomogenen DGL erhält man

$$D(s) = D_0 \cdot C(s) + D_0' \cdot S(s) + d(s)$$

Die Dispersionsfunktion erfüllt die Startbedingungen D(0) = 0, D‘(0)=0.
Es hat sich als zweckmäßig erwiesen eine spezielle Bahn D(s) zu bestimmen mit $\delta = 1$. Diese nennt man Dispersionsbahn. Da die Dispersion von den Ablenkmagneten dominiert wird gilt mit

$$k_x(s) = \frac{1}{\rho^2(s)} = h^2 \quad ; \quad D''(s) + h^2 D(s) = h$$

Da h = const. ist die partikuläre Lösung $D_p = C$ = const. Und damit folgt $h^2 C = h \quad \Rightarrow \quad C = 1/h$

$$D(s) = A \cdot \cos(hs) + B \cdot \sin(hs) + 1/h$$

$$D_0 = A + 1/h \quad \Rightarrow \quad A = D_0 - 1/h \quad \text{und} \quad D_0' = B \cdot h \quad \Rightarrow \quad B = D_0'/h$$

$$\Rightarrow \quad D(s) = \left(D_0 - 1/h\right) \cdot \cos(hs) + D_0'/h \cdot \sin(hs) + 1/h$$

mit ρ = 1/h erhalten wir für den Ablenkmagneten:

$$D(s) = D_0 \cdot \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) + D_0'\rho \cdot \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + \rho\left(1 - \cos\left(\frac{s}{\rho}\right)\right)$$

$$D'(s) = -\frac{D_0}{\rho} \cdot \sin(\frac{s}{\rho}) + D_0' \cos(\frac{s}{\rho}) + \sin(\frac{s}{\rho})$$

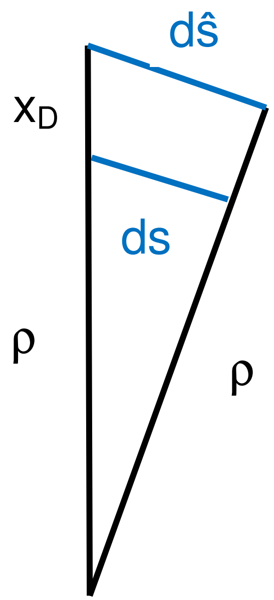
$$\begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{\rho}) & \rho \sin(\frac{s}{\rho}) & \rho\left(1 - \cos(\frac{s}{\rho})\right) \\ -\frac{1}{\rho}\sin(\frac{s}{\rho}) & \cos(\frac{s}{\rho}) & -\sin(\frac{s}{\rho}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} D_0 \\ D_0' \\ 1 \end{pmatrix}$$

An einer Stelle an der die Dispersion nicht verschwindet, hat ein Teilchen mit Impulsabweichung $\delta = \frac{\Delta p}{p_0}$ die Gesamtortsablage $x_\delta(s) = x_D(s) + x(s) = x(s) + D(s)\frac{\Delta p}{p}$. Teilchen mit Impulsabweichung laufen auf Dispersionsbahnen x_D. Diese Bahnen haben im Allgemeinen eine andere Länge, als der Sollorbit. D.h. die Bahnlänge im Ringbeschleuniger ist eine Funktion des Impulses.

6.1. Momentum compaction Faktor und γ_{tr}

Das Verhältnis von relativer Bahnlängenänderung ${}^{\Delta C}\!/_{C_0}$ zur relativen Impulsänderung δ nennt man auch Momentum compaction Faktor:

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_p = \frac{\Delta C / C_0}{\Delta p / p_0}$$



In linearer Näherung liefert $x_D(s) = D(s) \cdot \delta$ nur in den Bereichen der Ablenkmagnete einen wesentlichen Beitrag zu $\Delta C / C_0$. $\quad d\tilde{s} = \rho + x_D / \rho \, ds$

$$C + \Delta C = \oint d\tilde{s} = \oint ds + \oint \frac{x_D}{\rho} ds$$

$$\Delta C = \oint h \cdot x_D ds = \frac{\Delta p}{p_0} \oint D(s) h(s) ds = \frac{\Delta p}{p_0} \oint \frac{D(s)}{\rho} ds \quad \rightarrow \quad \alpha_p = \frac{1}{C_0} \oint D(s) h(s) ds = \frac{1}{C_0} \oint \frac{D(s)}{\rho} ds$$

Variiert man D(s) mittel der Ionenoptik, so kann man auch α_p verändern. Die Größe α_p ist ein Maß für die Dispersion im Bereich der Ablenkmagnete. Je kleiner D(s), d. h. je kompakter die Bahnen mit unterschiedlichem $\Delta p/p_0$ beieinanderliegen, umso kleiner ist α_p.

Ein Synchrotron kann nur funktionieren, wenn $\omega = \omega(p)$, da $\omega = 2\pi * v/C$. Damit erhält man

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta C}{C_0} \quad \text{mit} \qquad \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\Delta p}{p_0} \qquad \frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0}$$

Den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsabweichung und Impulsabweichung (relativistisch) kann man durch $\frac{dp}{dv} = \frac{m_0 d(\gamma\beta)}{d\beta}$ ermitteln.

Damit erhält man den Zusammenhang zwischen relativem Umlauffrequenzunterschied und der relativen Impulsabweichung.

$$\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p\right)\frac{\Delta p}{p_0} = \eta\frac{\Delta p}{p_0}}$$

Nun gibt es ein γ_{tr} für welches $\eta = \left(\frac{1}{\gamma_{tr}^{\ 2}} - \alpha_p\right) = 0$ wird. Dies geschieht bei der entsprechenden Übergangsenergie $E_{tr} = \gamma_{tr} m_0 c^2$.

$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^{\ 2}}$ und damit erhalten wir die folgenden Betriebsbereiche:

$\gamma < \gamma_{tr} \quad \Leftrightarrow \quad \eta > 0$ $\qquad$ $\Delta\omega$ wächst mit Δp

$\gamma > \gamma_{tr} \quad \Leftrightarrow \quad \eta < 0$ $\qquad$ $\Delta\omega$ nimmt ab mit Δp

$$\gamma = \gamma_{tr} \quad \Leftrightarrow \quad \eta = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0$$

Damit laufen die Teilchen isochron im Ring um, unabhängig von deren Impuls. Phasenfokussierung und Synchrotronschwingung ist nur möglich, wenn $\gamma \neq \gamma_{tr}\ d.h. \eta \neq 0$ ist. Daher muss während der Hochbeschleunigung beim Übergang von $\gamma < \gamma_{tr}$ nach $\gamma > \gamma_{tr}$ ein HF-Phasensprung von φ_s nach $\pi-\varphi_s$ stattfinden. Der Übergang ist ein Spezialproblem der Synchrotronbeschleuniger für Ionen, das nicht immer vermieden werden kann.

In einem Linearbeschleuniger ist $\alpha_p = 0$ und damit $\eta = \dfrac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \varphi = \varphi_s$.

Für extrem relativistische Teilchen strebt η gegen Null, und die Phasenschwingungen ”erstarren“.

6.2. Die periodische Dispersion

Im periodischen Lattice gilt

$$\begin{pmatrix} x(s+C) \\ x'(s+C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s,s+C) & s(s,s+C) \\ c'(s,s+C) & s'(s,s+C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \underline{A}(s,s+C)\,\vec{x} = \underline{M}(s)\vec{x}$$

wobei C der Umfang des Ringes oder die Länge einer ist Superperiode ist. Aus der allgemeinen Lösung der **Hillschen Differentialgleichung** erhalten wir (siehe Vorlesung 3) die Matrix <u>M</u> zu

$$\underline{M}(s) = \begin{pmatrix} \cos\Delta\Psi + \alpha(s)\sin\Delta\Psi & \beta(s)\sin\Delta\Psi \\ -\dfrac{(1+\alpha^2(s))\sin\Delta\Psi}{\beta(s)} & \cos\Delta\Psi - \alpha(s)\sin\Delta\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s,s+C) & s(s,s+C) \\ c'(s,s+C) & s'(s,s+C) \end{pmatrix}$$

mit $\mu = \Delta\Psi$ und $\gamma = \dfrac{1+\alpha^2}{\beta}$ folgt

$$\Rightarrow \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha(s)\sin\mu & \beta(s)\sin\mu \\ -\gamma(s)\sin\mu & \cos\mu - \alpha(s)\sin\mu \end{pmatrix} = \cos\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\mu \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix}$$
$$= \cos\mu\,\underline{I} + \sin\mu\,\underline{J}$$

Man nennt die Matrix M̲ auch die Twiss-Matrix oder Eigenmatrix des Beschleunigers. Der Phasenvorschub nach einem Umlauf ist µ. Wie wir aus der Betrachtung der Phasenraumfläche wissen, muss $\det(\underline{M}) = 1$ sein. Daher gilt

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha^2 + \beta\cdot\gamma = 1 \qquad , \ \underline{J}\cdot\underline{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\underline{I} \qquad , \ \underline{J}^{-1} = -\underline{J}$$

Für N Umläufe gelten nun: $\underline{M}^N = (\cos\mu\,\underline{I} + \sin\mu\,\underline{J})^N = \cos N\mu\,\underline{I} + \sin N\mu\,\underline{J}$

Die Strahlen im Ring bleiben nun stabil, wenn $\underline{M}^N$ nicht divergiert. Daher muss μ reell bleiben (sonst werden cos und sin zu cosh und sinh). Damit jedoch erhalten wir als Stabilitätsbedingung:

$$|\cos\mu| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |Tr\underline{\boldsymbol{M}}| = |\cos\mu + \alpha\sin\mu + \cos\mu - \alpha\sin\mu| = |2\cos\mu| \leq 2$$

Damit muss der Phasenvorschub $0 \leq \mu \leq \pi$ betragen. Damit können die TWISS Parameter der Ellipse eindeutig festgelegt werden:

$$\underline{\boldsymbol{M}}(s) = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha(s)\sin\mu & \beta(s)\sin\mu \\ -\gamma(s)\sin\mu & \cos\mu - \alpha(s)\sin\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\mu = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) \quad , \quad \beta = \frac{m_{12}}{\sin\mu} \quad , \quad \alpha = \frac{m_{11} - m_{22}}{2\sin\mu} \quad , \quad \gamma = -\frac{m_{21}}{\sin\mu}$$

Der Phasenvorschub μ ist durch die Matix M festgelegt. Da diese Matrix von Startpunkt s abhängt, sind die Größen α, β und γ Funktionen von s. μ hängt nicht von s ab! Durch die optischen Funktionen (Twiss-Parameter in Abhängigkeit von s wird eine Maschinenellipse, die sogenannte Eigenellipse definiert (Courant-Snyder Ellipse).

$$\gamma(s)x^2 + 2\alpha(s)xx' + \beta(s)x'^2 = \varepsilon$$

In einem Ringbeschleuniger ist auch die Dispersionsfunktion *D(s) = D(s+C)* und deren Ableitung *D'(s) = D'(s+C)* periodisch. Aus den oben gezeigten Lösungen erhält man mit einer speziellen Lösung d(s) der inhomogenen DGL

$$D(s) = D_0 C(s) + D_0' S(s) + d(s)$$

D_0 und D_0' werden so angepasst, dass die Periodizitätsbedingung erfüllt ist. Außerdem gilt

$$C(s_0) = 1 \quad ; \quad S(s_0) = 0$$

$$C'(s_0) = 0 \quad ; \quad S'(s_0) = 1$$

Um die Darstellung zu vereinfachen bezeichnen wir die Funktionen C und S nach einem Umlauf mit dem Index 1:

$$D(s_0 + C) = D_0 = D_0 C_1 + D_0' S_1 + d_1 \quad ; \quad D'(s_0 + C) = D_0' = D_0 C_1 + D_0' S_1' + d_1'$$

$$\Rightarrow \quad D_0(1 - C_1) = D_0' S_1 + d_1 \quad ; \quad D_0'(1 - S_1') = D_0 C_1' + d_1'$$

und damit folgt $$\boxed{D_0 = \frac{d_1' S_1 + d_1(1 - S_1')}{(1 - C_1)(1 - S_1') - C_1' S_1}}$$

Die Funktionen ergeben sich aus der Matrix <u>M</u> zu:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha(s)\sin\mu & \beta(s)\sin\mu \\ -\gamma(s)\sin\mu & \cos\mu - \alpha(s)\sin\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & S_1 \\ C_1' & S_1' \end{pmatrix}$$

Aus dem Nenner wird dann

$$(1-C_1)(1-S_1') - C_1'S_1 = 1 + (C_1S_1' - C_1'S_1) - (C_1 + S_1') = 2 - 2\cos\mu = 4\sin^2\frac{\mu}{2}$$

Für den Zähler erhält man (siehe in der Literatur, z.B. Hinterberger):

$$S_1 d_1' + (1-S_1')d_1 = 2\sqrt{\beta_0}\cdot\sin\frac{\mu}{2}\cdot\oint h\sqrt{\beta}\cos(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2})\,d\overline{s}$$

Damit können wir endgültig hinschreiben

$$D_0 = \frac{2\sqrt{\beta_0}\cdot\sin\frac{\mu}{2}\cdot\oint h\sqrt{\beta}\cos(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2})\,d\overline{s}}{4\sin^2\frac{\mu}{2}} = \frac{\sqrt{\beta_0}}{2\sin\frac{\mu}{2}}\cdot\oint h\sqrt{\beta}\cos(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2})\,d\overline{s}$$

oder allgemein an einer Stelle s

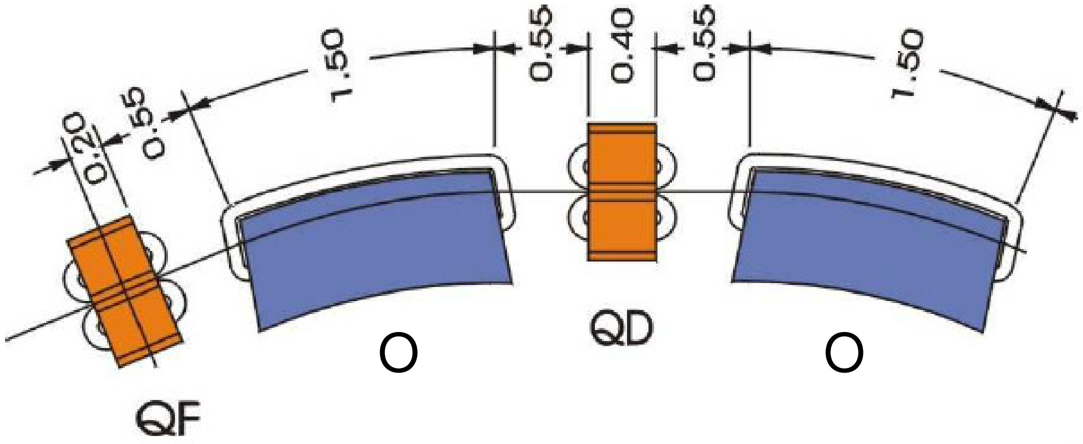
$$D(s)=\frac{\sqrt{\beta(s)}}{2\sin\frac{\mu}{2}}\cdot\int_{s}^{s+C} h(\bar{s})\sqrt{\beta(\bar{s})}\cos(\Delta\Psi-\frac{\mu}{2})\,d\bar{s}$$

Man erkennt, dass D(s) immer größer wird, je näher $\sin\frac{\mu}{2}$ der Null kommt und wird schließlich unendlich groß. Wenn also $\sin\frac{\mu}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad \mu=2\pi\cdot N$ und damit ist Q ganzzahlig, denn

$$Q=\frac{\mu}{2\pi}=N=\frac{1}{2\pi}\int_0^C\frac{ds}{\beta(s)}\,.$$

6.3. Lattice Design

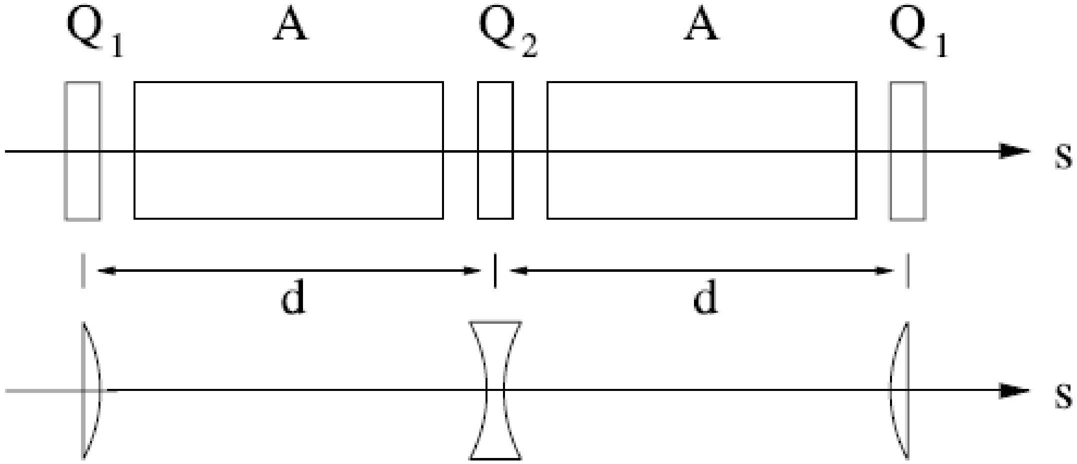
Wir betrachten die periodische Anordnung von Einheitszellen mit einer FODO-Struktur. Eine FODO-Struktur ist eine Anordnung aus einem stark fokussierenden Element QF, einer Driftstrecke oder schwach fokussierenden Strecke O, einem stark defokussierenden Element QD und einer weiteren Driftstrecke oder schwach fokussierenden Strecke O.



Die klassische FODO-Optik ist die Optik des ”combined function“ Synchrotrons, dessen Einheitszelle aus einem stark fokussierenden Ablenkmagneten, einer Driftstrecke, einem stark defokussierenden Ablenkmagneten und einer weiteren Driftstrecke besteht. Bei dem ”separated function“ Synchrotron wird die starke Fokussierung mithilfe von Quadrupolen realisiert.

Wir betrachten als konkretes Beispiel die FODO-Optik des ”separated function“ Synchrotrons. Die Einheitszelle besteht aus folgenden Elementen:
Quadrupol Q1 – Driftstrecke – Ablenkmagnet A1 – Driftstrecke – Quadrupol Q2 – Driftstrecke – Ablenkmagnet A2 – Driftstrecke

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, dass die Fokussierungsstärke der Ablenkmagnete vernachlässigbar klein ist und wir fangen in der Mitte des Quadrupols Q1 an.



$$\underline{R_{FODO}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - d\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + \frac{d^2}{2f_1 f_2} & 2d - \frac{d^2}{f_2} \\ -\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + \frac{d}{2f_1}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{2}{f_2}\right) - \frac{d^2}{4f_1^2 f_2} & 1 - d\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + \frac{d^2}{2f_1 f_2} \end{pmatrix}$$

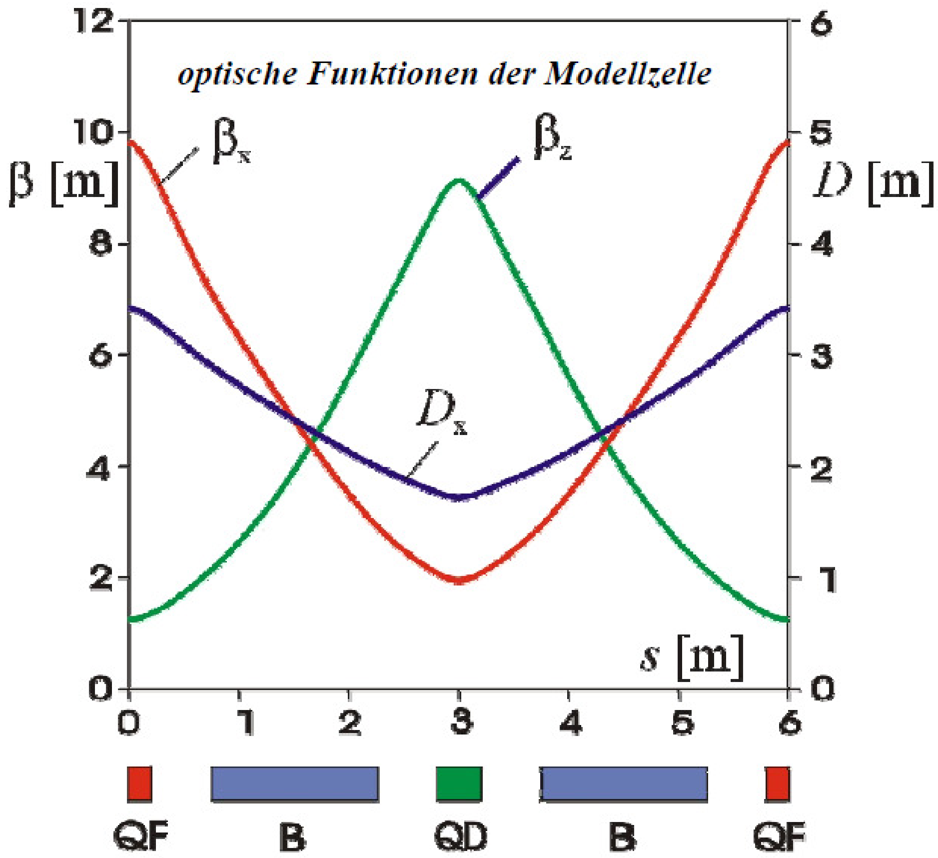
Daraus erhalten wir die Twiss-Parameter und den Phasenvorschub:

$$\cos\mu = \frac{1}{2}(M_{11}+M_{22}) = 1 - d\left(\tfrac{1}{f_1}+\tfrac{1}{f_2}\right) + \tfrac{d^2}{2f_1f_2}$$

$$\alpha = \frac{M_{11}-M_{22}}{2\sin\mu} = 0 \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\beta}$$

Die Eigenellipse dieser Struktur ist aufrecht.

$$\Rightarrow \quad \beta = \frac{M_{12}}{\sin\mu} = (2d - \frac{d^2}{f_2})\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\mu}}$$



Bei einer FODO-Optik ist β im Bereich des fokussierenden Elementes maximal und im Bereich des defokussierenden Elementes minimal.

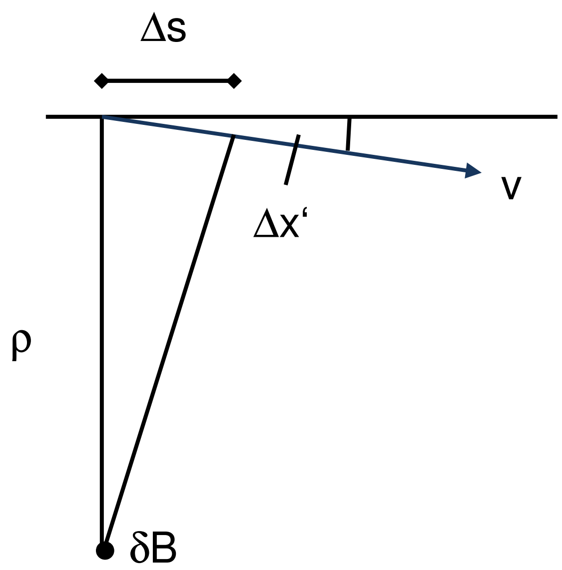
Bei der Rechnung haben wir die geringe Fokussierkraft der Kantenfokussierung der Ablenkmagnete vernachlässigt, da diese im Vergleich zu den Quadrupolen sehr klein ist.
Grenzen des stabilen Bereiches für einen Beschleunigerring, der aus N identischen Einheitszellen mit FODO-Struktur aufgebaut ist. Wir betrachten wieder eine ”separated function“-Maschine bei extrem hohen Energien, bei der die Fokussierungsstärke der Ablenkmagnete im Vergleich zur Fokussierungsstärke der Quadrupolmagnete vernachlässigbar ist.

6.4. Störfelder und Resonanzen

Wir betrachten die Störung der geschlossenen Gleichgewichtsbahn durch Dipolfeldfehler und mögliche Korrekturen mit Steerer. Ein Dipolfeldfehler δB an der Stelle s_0, der sich über eine infinitesimal kurze Wegstrecke Δs erstreckt, verursacht eine lokale Störung, die sich in der Form einer Winkeländerung (”Kick“) Δx’ ggü. dem regulären Ablenkwinkel x‘ äußert.

Damit wird die Gleichgewichtsbahn eines Kreisbeschleunigers, der „closed orbit“, den das Sollteilchen bei jedem Umlauf von neuem durchlaufen soll, gestört. Man verwendet daher auch den Begriff ”closed orbit distortion“.

$$m\omega^2\rho = q\omega\rho \cdot \delta B$$



$$\omega = -\frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{q}{m}\delta B \quad , \quad \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

$$\Delta x' = \frac{q}{m}\frac{\Delta s}{v}\delta B \quad , \quad \frac{m \cdot v}{q} = \rho \cdot B$$

magnetische Steifigkeit des Strahls ρ*B.

$$\Delta x' = -\frac{\Delta s}{\rho \cdot B}\delta B = F(s_0) \cdot \Delta s$$

Die Gleichgewichtsbahn wird hierdurch modifiziert → "closed orbit distortion"
Wenn eine Störung vorliegt, machen die Teilchen Betatronschwingungen um die gestörte Gleichgewichtsbahn. Die gestörte Gleichgewichtsbahn soll mit $x_c(s)$ bezeichnet werden. Durch die Transformation nach einem Umlauf und die Periodizitätsbedingung folgt

$$\begin{pmatrix} x_c \\ x_c' - \Delta x' \end{pmatrix} = \underline{M}(s_0) \begin{pmatrix} x_c \\ x_c' \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{M}(s_0) = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha_0 \sin\mu & \beta_0 \sin\mu \\ -\gamma_0 \sin\mu & \cos\mu - \alpha_0 \sin\mu \end{pmatrix} \quad mit \quad \mu = 2\pi \cdot Q$$

Floquetsche Lösung der Hillschen DGL!

$$x_c = (\cos\mu + \alpha_0 \sin\mu) \cdot x_c + \beta_0 \sin\mu \cdot x_c'$$

$$x_c' - \Delta x' = -\gamma_0 \sin\mu \cdot x_c + (\cos\mu - \alpha_0 \sin\mu) \cdot x_c'$$

$$x_c' = \frac{1 - \cos\mu - \alpha_0 \sin\mu}{\beta_0 \sin\mu} x_c \quad \text{und} \quad -\Delta x' = -\gamma_0 \sin\mu \cdot x_c + (\cos\mu - \alpha_0 \sin\mu - 1) \cdot x_c'$$

Setzt man x'_c in die zweite Gleichung ein dann erhält man nach einigen Umformungen

$$x_c = -\Delta x' \frac{\beta_0 \sin\mu}{2(\cos\mu - 1)} = \Delta x' \frac{\beta_0}{2\tan\frac{\mu}{2}}$$

$$x_c = \Delta x' \frac{\beta_0}{2\tan(\pi \cdot Q)}$$

und

$$x_c' = \frac{\Delta x'}{2}\left(1 - \frac{\alpha_0}{\tan\frac{\mu}{2}}\right) = \frac{\Delta x'}{2}\left(1 - \frac{\alpha_0}{\tan(\pi \cdot Q)}\right)$$

Damit ist die Amplitude an der Störstelle festgelegt: $a_c = \dfrac{\Delta x' \sqrt{\beta_0}}{2\sin(\pi \cdot Q)}$

Die allgemeine Orbitfunktion ist dann: $x_c(s) = \dfrac{\Delta x' \sqrt{\beta_0}}{2\sin(\pi \cdot Q)} \sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi(s_0) - Q\pi]$

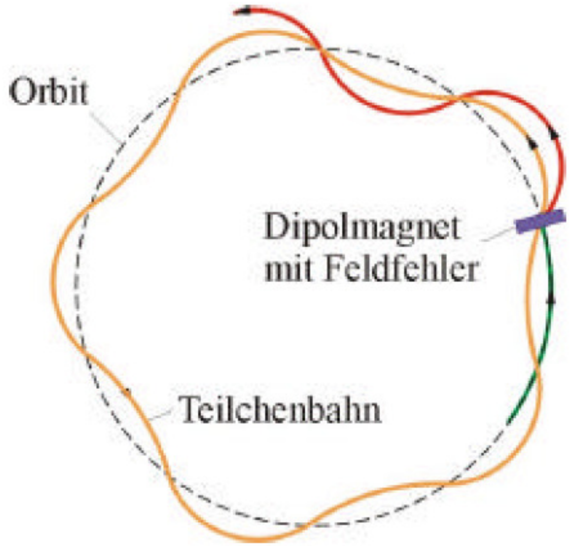
Die Auswirkungen einer lokalen Störung →

$$x_c(s) \propto \Delta x', \; x_c(s) \propto \sqrt{\beta_0}, \; x_c(s) \propto \sqrt{\beta(s)}, \; x_c(s) \propto \frac{1}{\sin(\pi \cdot Q)}$$

Die Zahl Q der Betatronschwingungen pro Umlauf darf nicht in der unmittelbaren Nähe einer ganzen Zahl liegen, ganzzahlige Resonanzen müssen unbedingt vermieden werden. Für ganzzahlige Q liegt die gestörte Gleichgewichtsbahn wegen 1/ sinQπ im Unendlichen. Dies nennt man auch ein ganzzahliges Stoppband! Die Verallgemeinerung auf viele Störstellen ist

$$x_c(s) = \frac{\sqrt{\beta_0}}{2\sin(\pi \cdot Q)} \int_s^{s+C} F(\bar{s}) \sqrt{\beta(\bar{s})} \cos[\psi(\bar{s}) - \psi(s) - Q\pi] d\bar{s}$$

Dipolfeldfehler werden durch kleine Abweichungen der Magnetfelder vom Sollwert und Ungenauigkeiten in der Positionierung von Ablenkmagneten, Quadrupolmagneten und Sextupolmagneten verursacht. Vor allem Quadrupolmagnete tragen besonders stark zur Störung bei, wenn die Gleichgewichtsbahn nicht durch die magnetische Mitte der Quadrupolmagnete geht.



In Fall von ganzzahligen Q passieren die Teilchen Feldfehler immer mit derselben Phase und die Fehler addieren sich zu großen Amplituden auf.
Eine unkorrigierte Gleichgewichtsbahn mit großen Abweichungen von der idealen Gleichgewichtsbahn verringert die zur Verfügung stehende Apertur und damit die Akzeptanz der Maschine. Außerdem werden die unerwünschten nichtlinearen Effekte verstärkt.

6.5. Quadrupol- und Sextupolfehler, Resonanzen

Ein lokaler Quadrupolfeldfehler oder allgemeiner ein lokaler Gradientenfehler führt zu einer Änderung der Amplitudenfunktion β(s) und der Betatronschwingungszahl Q. Die lokalisierte Störung kann durch den Effekt einer dünnen Linse mit der Brechkraft

$$\frac{1}{f} = \delta k \cdot \Delta s$$

$$\underline{M}(s_0) = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\mu_0 + \alpha_0\sin\mu_0 & \beta_0\sin\mu_0 \\ -\gamma_0\sin\mu_0 & \cos\mu_0 - \alpha_0\sin\mu_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\mu_0 + \alpha_0\sin\mu_0 & \beta_0\sin\mu_0 \\ -\frac{1}{f}(\cos\mu_0 + \alpha_0\sin\mu_0) - \gamma_0\sin\mu_0 & -\frac{\beta_0}{f}\sin\mu_0 + \cos\mu_0 - \alpha_0\sin\mu_0 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man $\cos\mu = \frac{1}{2}(\cos\mu_0 + \alpha_0\sin\mu_0 - \frac{\beta_0}{f}\sin\mu_0 + \cos\mu_0 - \alpha_0\sin\mu_0)$

$$\cos\mu = \cos\mu_0 - \frac{\beta_0}{2f}\sin\mu_0 \quad \Rightarrow \quad \cos\mu - \cos\mu_0 = -2\sin\left(\frac{\mu+\mu_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\mu-\mu_0}{2}\right) = -\frac{\beta_0}{2f}\sin\mu_0$$

Da $\mu \sim \mu_0$ folgt $-2\sin\mu_0\sin\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) = -\frac{\beta_0}{2f}\sin\mu_0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) = \frac{\beta_0}{4f}$

Da $\Delta\mu << 1$ ist folgt somit $\sin\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) \approx \frac{\Delta\mu}{2} = \frac{\beta_0}{4f} \quad \Rightarrow \quad \Delta\mu = \frac{\beta_0}{2f} = 2\pi\Delta Q$

➔ $\boxed{\Delta Q = \frac{\beta_0}{4\pi f}}$ → Tune shift

Diese Gleichung wird unter anderem dazu benutzt, die Betatronfunktion β_0 im Bereich eines Quadrupols zu messen. Hierzu wird die Brechkraft des Quadrupols ein klein wenig geändert, und die Änderung des Arbeitspunktes ΔQ genau gemessen. Die Verallgemeinerung auf die Summe aller Gradientenfehler ergibt für die Änderung des Arbeitspunktes

$$\Delta Q = \frac{1}{4\pi} \oint \beta(\bar{s}) \delta k(\bar{s}) d\bar{s}$$

Die Änderung der Amplitudenfunktion $\Delta\beta(s)$ findet man unter Berücksichtigung der Periodizitäts-bedingung ganz ähnlich wie dies für Dipolfehler skizziert wurde:

$$\Delta\beta(s) = \frac{\beta(s)}{2\sin(2\pi \cdot Q)} \int_s^{s+C} \delta k(\bar{s}) \beta(\bar{s}) \cos 2\left[\psi(\bar{s}) - \psi(s) - Q\pi\right] d\bar{s}$$

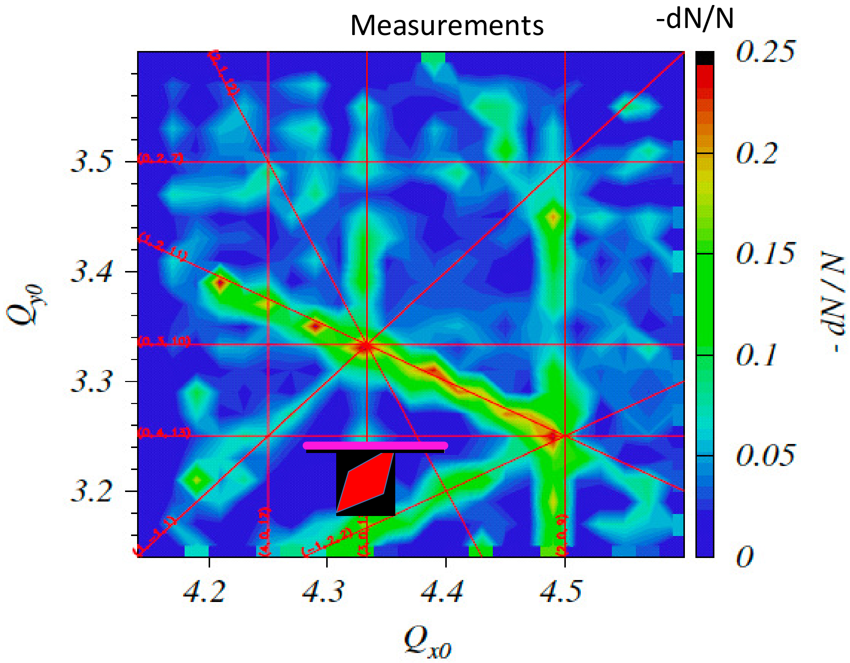
Wenn | cos μ0| nahe bei Eins liegt, kann | cos μ| aufgrund der Störung größer als Eins werden, und die Betatronschwingungen werden instabil. Es gibt ein Intervall δQ in der Umgebung von halb- und ganzzahligen Q-Werten, in dem der Beschleuniger aufgrund von Gradientenfehlern instabil wird.

➔ Stoppband 2. Ordnung

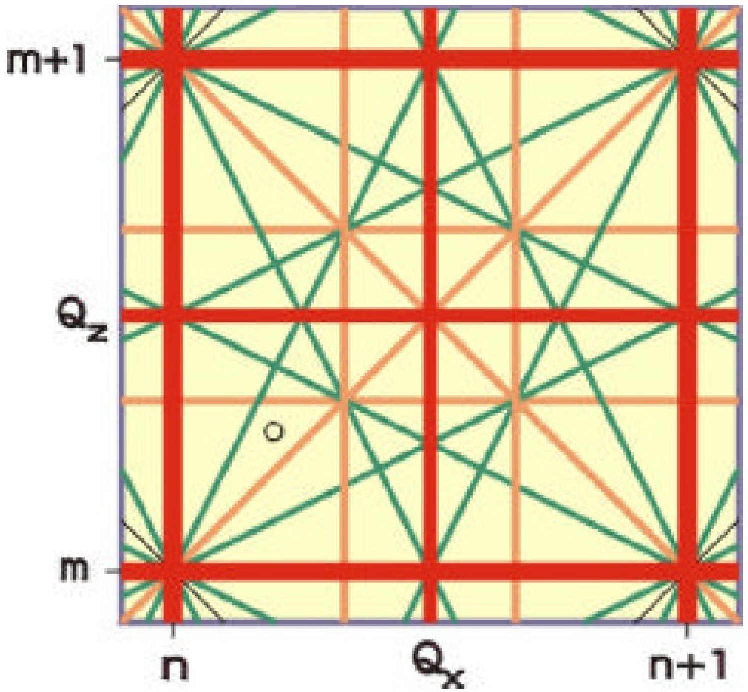
Die Störung verursacht einen tune shift, eine Verlagerung des Arbeitspunktes!
Wenn nun der Arbeitspunkt in der Nähe eines Stoppbandes zweiter Ordnung

(Q = halbzahlig) liegt, dann liegt der Phasenvorschub μ_0 pro Umlauf in der Nähe von π, und es besteht die Möglichkeit der Resonanz.

Man kann dann ein entsprechendes Tune-Diagramm erstellen mit den Resonanzen verschiedener Ordnung:



Feldfehler	optische Resonanz
Dipolfehler	$Q = n$
Quadrupolfehler	$Q = n + 1/2$
Sextupolfehler	$Q = n + 1/3$
Oktupolfehler	$Q = n + 1/4$
usw.	usw.



Q_x-Q_z-Diagramm
bis zur 3. Ordnung

$$m \cdot Q_x + n \cdot Q_z = p \qquad (m, n, p = \text{ganze Zahlen})$$

6.6. *Chromatizität*

Teilchen mit einer Impulsabweichung $\delta = \Delta p/p_0$ erfahren eine unterschiedliche Fokussierungsstärke. Die Auswirkung dieses Effektes auf die Zahl der Betatronschwingungen (Q) pro Umlauf wird durch die Chromatizität ξ erfasst.

$$\Delta Q_x = \xi_x \frac{\Delta p}{p_0} \quad , \quad \Delta Q_y = \xi_y \frac{\Delta p}{p_0}$$

Bei der Berechnung der Chromatizität unterscheidet man zwischen der natürlichen Chromatizität ξ^n und der durch Sextupolfelder ausgelösten Chromatizität ξ^s. Die Fokussierungsstärke K(s) in der Hill'schen Differenzialgleichung ist umgekehrt proportional zu dem Impuls der Teilchen.

$$\Delta K_x = -K_x \frac{\Delta p}{p_0}$$

Die Änderung des Arbeitspunktes aufgrund von Quadrupolfehlern haben wir erhalten aus

$$\Delta Q = \frac{1}{4\pi}\oint \beta(\bar{s})\Delta K_x d\bar{s} = \underbrace{-\frac{1}{4\pi}\oint \beta(\bar{s})K_x(\bar{s})d\bar{s}}_{\xi_x^n} \cdot \frac{\Delta p}{p_0}$$

Damit erhalten wir für die natürliche Chromatizität:

$$\xi_x^n = -\frac{1}{4\pi}\oint \beta_x(\bar{s})K_x(\bar{s})d\bar{s} \quad , \quad \xi_y^n = -\frac{1}{4\pi}\oint \beta_y(\bar{s})K_y(\bar{s})d\bar{s}$$

Da die Fokussierungsstärken K_x und K_y umgekehrt proportional zu dem Impuls p sind, ist die natürliche Chromatizität immer negativ. Der Betrag der Chromatizität nimmt mit der Stärke der Fokussierung zu. Besonders große Beiträge kommen aus dem Bereich von fokussierenden Quadrupolen, wo sowohl die Betatronfunktion wie die Fokussierungsstärke groß sind.

Eine zusätzliche Chromatizität entsteht durch Sextupolfelder, wenn die Dispersion D von null verschieden ist. Für die Sextupolfelder gilt

$$B_y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}\right)x^2 = \frac{g_s}{2}x^2$$

Ein Teilchen mit der Ortsabweichung $x = D\dfrac{\Delta p}{p_0}$ spürt den Gradienten des Sextupolfeldes

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} \approx \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}\right)x = g_s x$$ und damit $$\Delta K_x^s = \frac{q}{p}\frac{\partial B_y}{\partial x} \approx \frac{g_s x}{B\cdot\rho} = \frac{g_s D}{B\cdot\rho}\frac{\Delta p}{p_0}$$

Die Wirkung des Sextupols hängt daher in diesem Fall von der Dispersion ab.

$$\Rightarrow \quad \Delta Q = \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint g_s(\bar{s})\frac{\beta_x(\bar{s})D(\bar{s})}{B\cdot\rho}d\bar{s}}_{\xi_x^s}\cdot\frac{\Delta p}{p_0}$$

Natürliche Quellen von Sextupolfeldern sind die Dipolmagnete. Vor allem bei niedrigen Erregungen verursacht das remanente Feld starke Sextupolkomponenten. Die Gesamtchromatizität ist die Summe

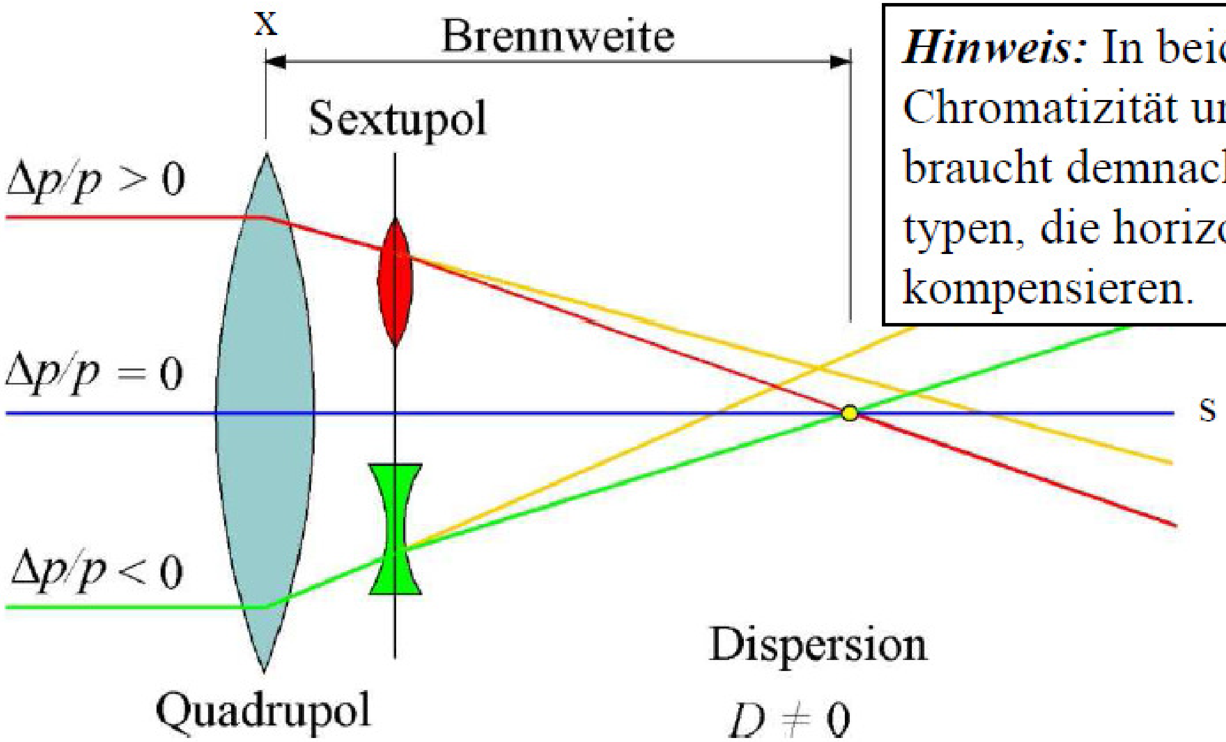
$$\xi_x = \xi_x^n + \xi_x^s$$

Um die natürliche Chromatizität unterschiedlich großer Maschinen miteinander vergleichen zu können, wird manchmal auch die relative natürliche Chromatizität definiert

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \xi_{rel}^n \frac{\Delta p}{p_0}$$

Die meisten Maschinen mit starker Fokussierung haben eine relative natürlich Chromatizität im Bereich von -1 und -1.5.

Zur Korrektur der natürlichen Chromatizitäten und der durch störende Sextupolfelder ausgelösten Chromatizitäten werden gezielt Korrektursextupole eingesetzt. Die Größen ξ_x^s und ξ_y^s werden mithilfe der Korrektursextupole so modifiziert, dass nach der Korrektur $\xi_x \approx 0$ und $\xi_y \approx 0$ sind.



Hinweis: In beiden Ebenen ist die Chromatizität unterschiedlich. Man braucht demnach zwei Sextupoltypen, die horizontal bzw. vertikal kompensieren.

Im Prinzip reichen zwei Sextupole zur Korrektur, jedoch schränkt dies die dynamische Apertur des Ringes deutlich ein. Eine Korrektur der Chromatizität ist in der Regel stets erforderlich, da sonst die Bandbreiten des Arbeitspunktes (”tune spread“), d. h. ΔQ_x und ΔQ_y aufgrund der Impulsunschärfe $\Delta p/p_0$ zu groß werden. Die zur Korrektur der Chromatizität notwendigen Sextupolmagnete haben den Nachteil, dass sie nichtlineare Resonanzen dritter Ordnung anfachen.