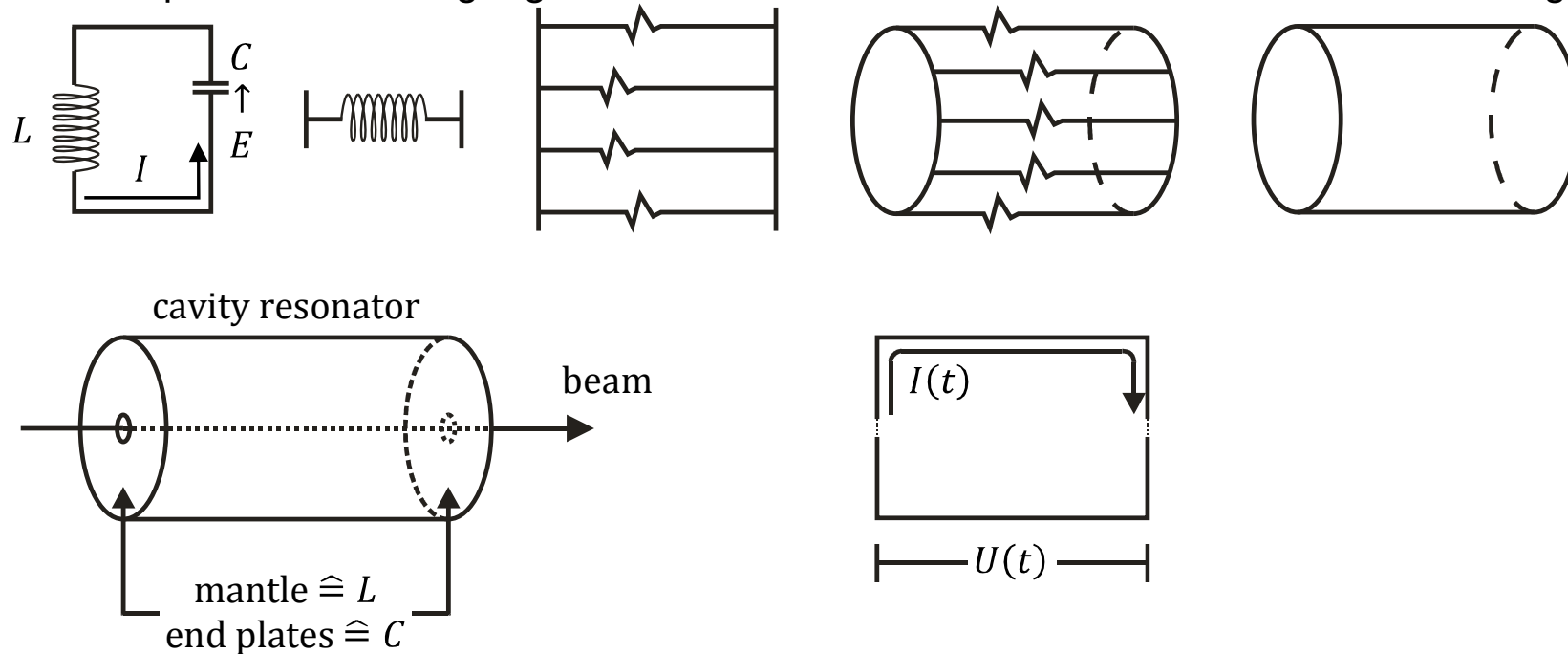


8.) Ringbeschleuniger-Resonatoren (cavities)

Zur Beschleunigung von geladenen Teilchen werden möglichst hohe elektrische Feldstärken benötigt. Bei der Hochfrequenzbeschleunigung werden diese Felder in Resonatoren hoher Güte erzeugt.



Übergang von einem Schwingkreis zu einem Hohlraumresonator. Im Resonator breiten sich die resonanten elektromagnetischen Felder aus. Die Beschreibung der Felder ergibt sich aus den (quellfreien) Maxwellgleichungen und den Randbedingungen der Resonatoren:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\text{rot rot}\vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \text{grad div}\vec{B} - \Delta\vec{B} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ebenso erhält man

(7.1)

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Außerdem gilt $\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

Mit $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ und $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ erhält man

$$\Delta\vec{B} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \Delta\vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Wir teilen nun den Laplaceoperator in einen transversalen und einen longitudinalen Teil auf

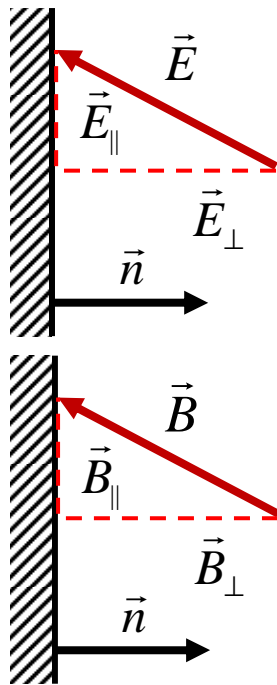
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_t^2 + \nabla_l^2$$

dann kann man mit folgendem Ansatz weiterrechnen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y)e^{\pm ikz} \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(x, y)e^{\pm ikz}$$

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{B} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \left(\nabla_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E} = \vec{0} \quad (7.2)$$

Die speziellen Lösungen ergeben sich aus der Art des Resonators und den Randbedingungen. Diese Randbedingungen sind:



E_{\parallel} würde Ladungen verschieben und für $E_{\parallel} = 0$ sorgen
Daher $\vec{E} \times \vec{n} = \vec{0}$

B_{\perp} würde über Induktion für einen Strom sorgen, der
Diese Komponente kompensieren würde
Daher folgt $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$

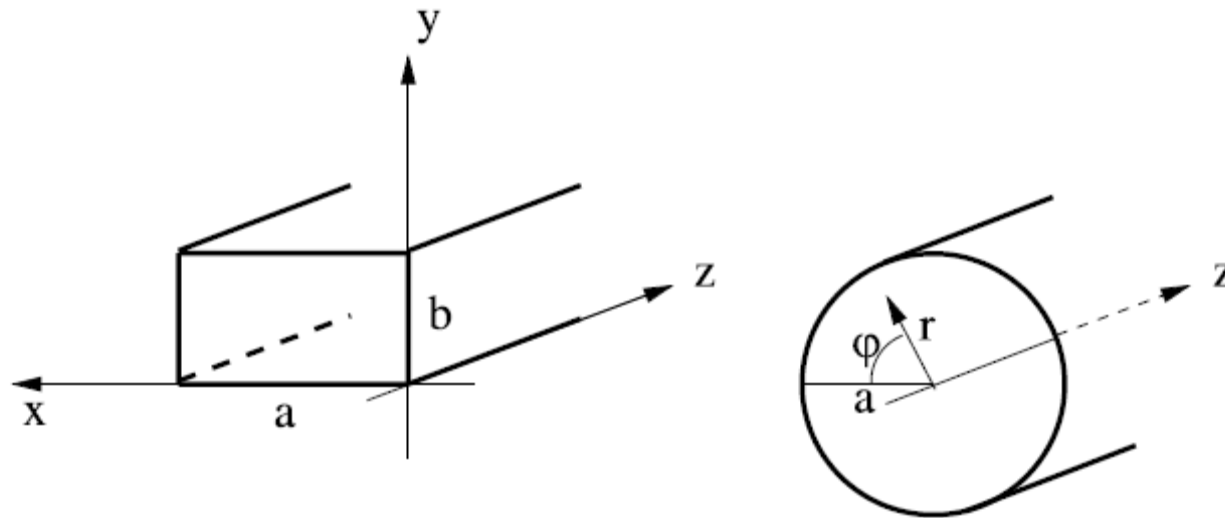
Bei HF-Systemen kommt noch der **Skineffekt** hinzu. Dieser begrenzt die Tiefe im Metall, indem die Ströme an der Oberfläche fließen können. Die theoretische Ableitung ergibt eine Diffusionsgleichung für die Stromdichte entlang der Oberfläche und damit ein exponentieller Abfall der Stromdichte mit zunehmender Tiefe im Metall. Die Größe, welche den exponentiellen Abfall bestimmt ist die Skintiefe

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho_R}{\omega\mu_0\mu_r}} \quad (7.3)$$

ist die Feldeindringtiefe in den Leiter mit endlichen spezifischen ohmschen Widerstand ρ_R

Beispiel: Kupfer ($\rho_{Cu} = 1.8 \cdot 10^{-8} \Omega m$) und $\omega \approx 10^8 \text{ Hz} \rightarrow \delta \approx 10 \mu m$

Im Allgemeinen betrachtet man nun zwei Resonatorgeometrien, den Rechteckresonator und den Zylinderresonator:



Bei den Lösungen unterscheidet man H-Wellen und E-Wellen.

E-Welle $E_z \neq 0$, d.h. B hat nur transversale Komponenten --> TM-Mode

B-Welle $B_z \neq 0$, d.h. E hat nur transversale Komponenten --> TE-Mode

Der einfachste Hohlraumresonator ist der Topfkreis (pill box cavity). Dieser zylindrische Hohlraumresonator entsteht durch den Abschluss eines zylinderförmigen Wellenleiters. Die für die Hochfrequenzbeschleunigung wichtigste Schwingungsform ist die TM_{010} Mode. TM_{nmq} bedeutet n azimutale Perioden, m radiale Knoten und q halbe Perioden in longitudinaler Richtung. Mit der Grundwelle TM_{010} erhalten wir die Felder:

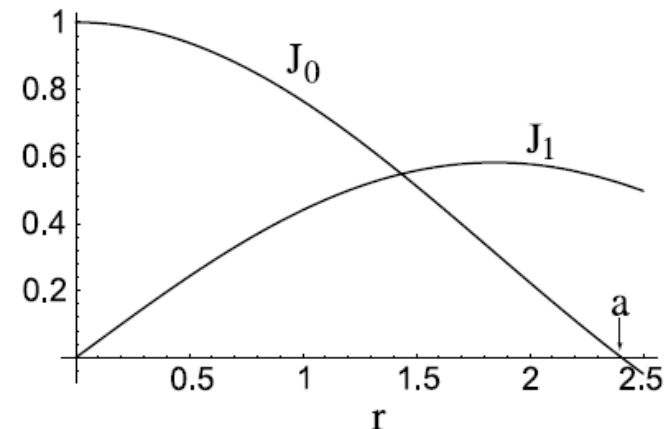
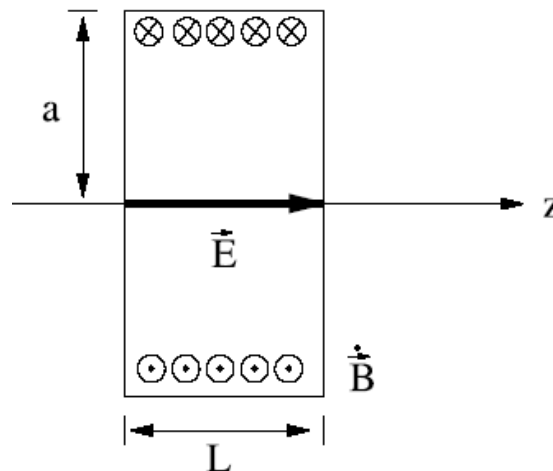
$$E_\phi = 0, E_r = 0, E_z = E_0 J_0(k_{01}r) e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad B_z = 0, B_r = 0, B_\phi = -i\omega \frac{a}{x_{01} c^2} E_0 J'_0(k_{01}r) e^{i\omega t} \quad (7.4)$$

Nun gelten $J'_0(k_{01}r) = -J_1(k_{01}r)$ und $x_{01} = 2,40483$ ist die Nullstelle $J_0(x_{01}) = 0$

Die Resonanzfrequenz ist durch den Innenradius a und diese Nullstelle bestimmt

$$\nu = \frac{2,40483 \cdot c}{2\pi a} \quad (7.5)$$

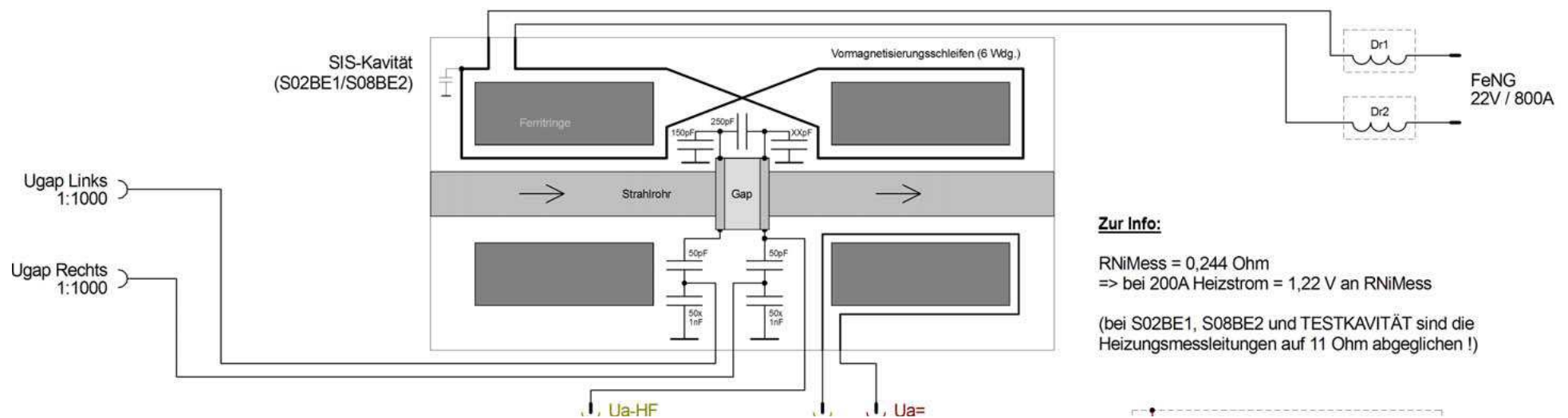
Bsp. für einen Innenradius von 0,23 m ergibt sich $\nu = 500$ MHz



Die Länge der Kavität kann bei dieser Mode nahezu frei gewählt werden. Die Teilchen werden in der Mitte maximal beschleunigt, da das longitudinale elektrische Feld E_z für $r = 0$ maximal ist.

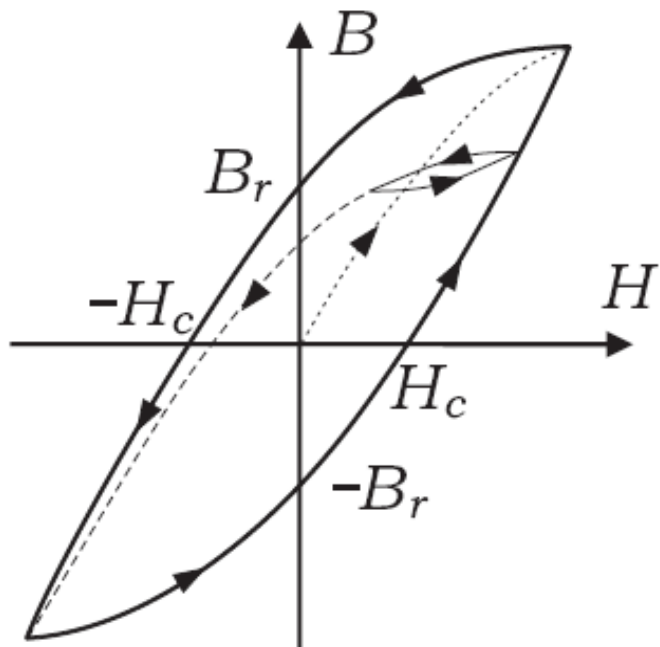
8.1. Ferritkavitäten

Eine interessante Variante ist der Koaxialresonator. Dessen Resonanzfrequenz kann durch die Änderung der Permeabilität μ der Ferritkerne verändert werden. Das Schema einer SIS18 Ferrit-Kavität ist untenstehend dargestellt:



- 1) Die SIS18-Kavität besteht aus zwei Stapeln von je 32 Ferrit-Scheiben.
- 2) Die Ferrit-Ringe sind vom Typ Ferroxcube FXC 8C12m (Phillips in Eindhoven).
- 3) Abmessungen der Ferrit-Scheiben: $d_a=498$ mm, $d_i=270$ mm, $l=25$ mm.
- 4) Die beiden Ferrit-Stapel werden über 6 achtförmige Windungen vorbestromt (Änderung von μ).

- 5) Die Einkopplung der HF erfolgt gemischt, induktive-und kapazitive Einkopplung.
- 6) Die Gapspannung jeder Gaphälfte wird über einen Gapspannungsteiler gemessen.
- 7) Die in die achtförmigen Vorbestromungswindungen eingekoppelte HF wird über 3 Blockkondensatoren von $15 \times 5 \text{ nF} = 75 \text{ nF}$ abgeleitet.
- 8) Die Gapkapazität ist 250 pF , zusätzlich sind nochmal $2 \times 150 \text{ pF}$ parallel zum Gap geschaltet.



H_c : coercive magnetizing field
 B_r : residual induction

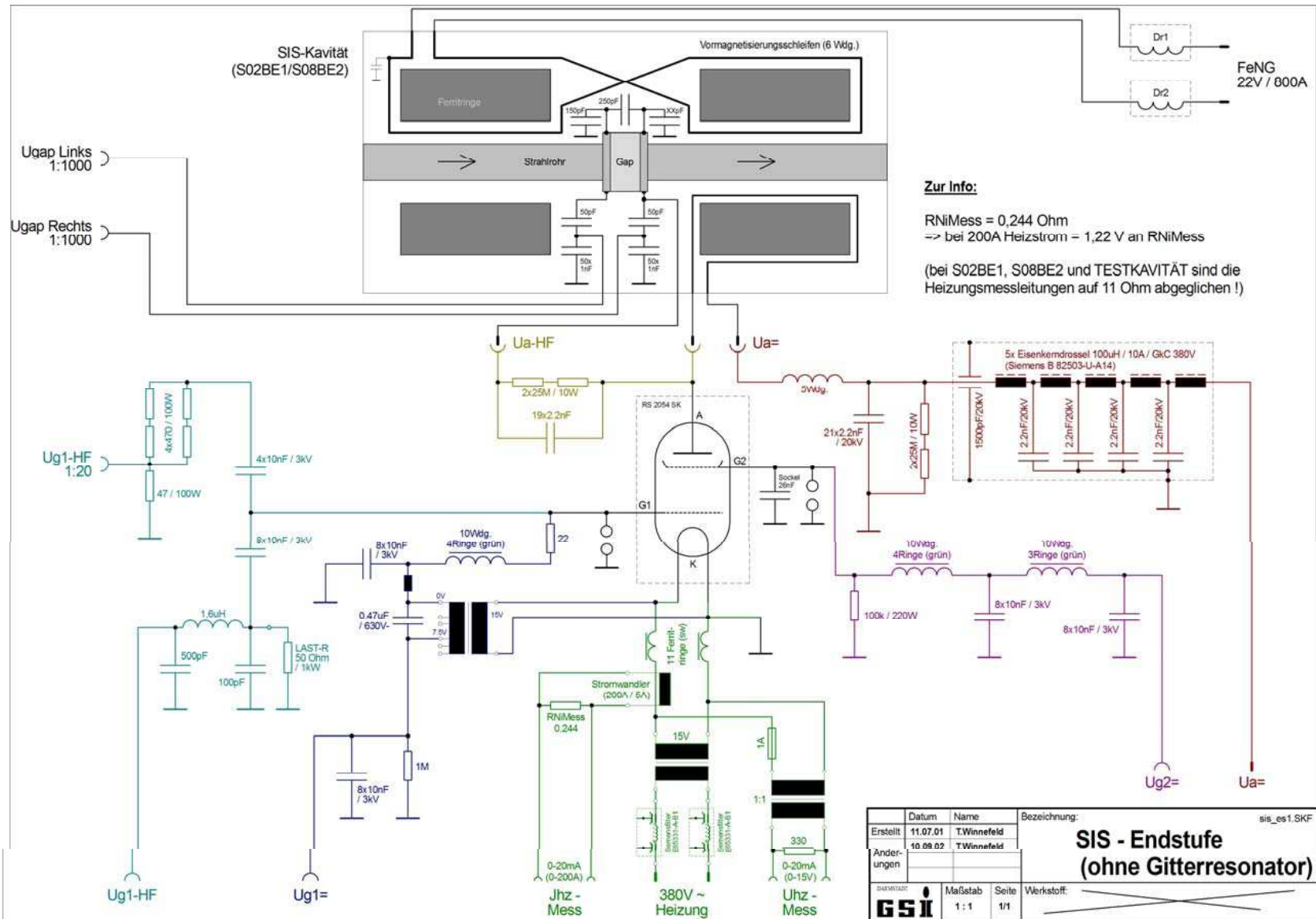
soft magnetic material:
 narrow hysteresis loop
 hard magnetic material:
 wide hysteresis loop
 (limits between soft and hard are not strict)

Bias current $\rightarrow H_{bias} \rightarrow$
 modification of
 differential permeability:

$$\mu_{\Delta} = \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

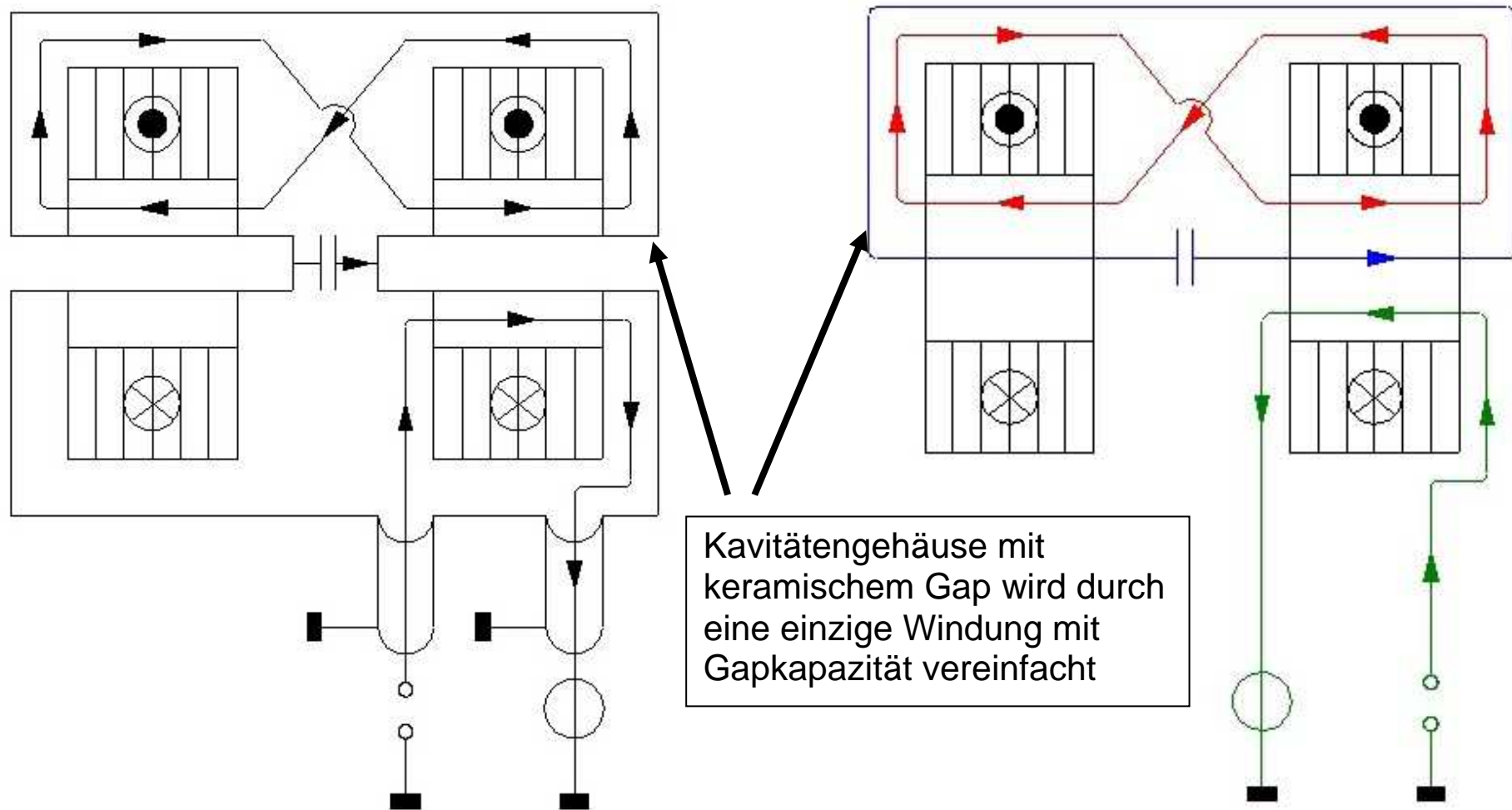
Index Δ is now left out...

Zur Ferrit-Füllung der Kavität!

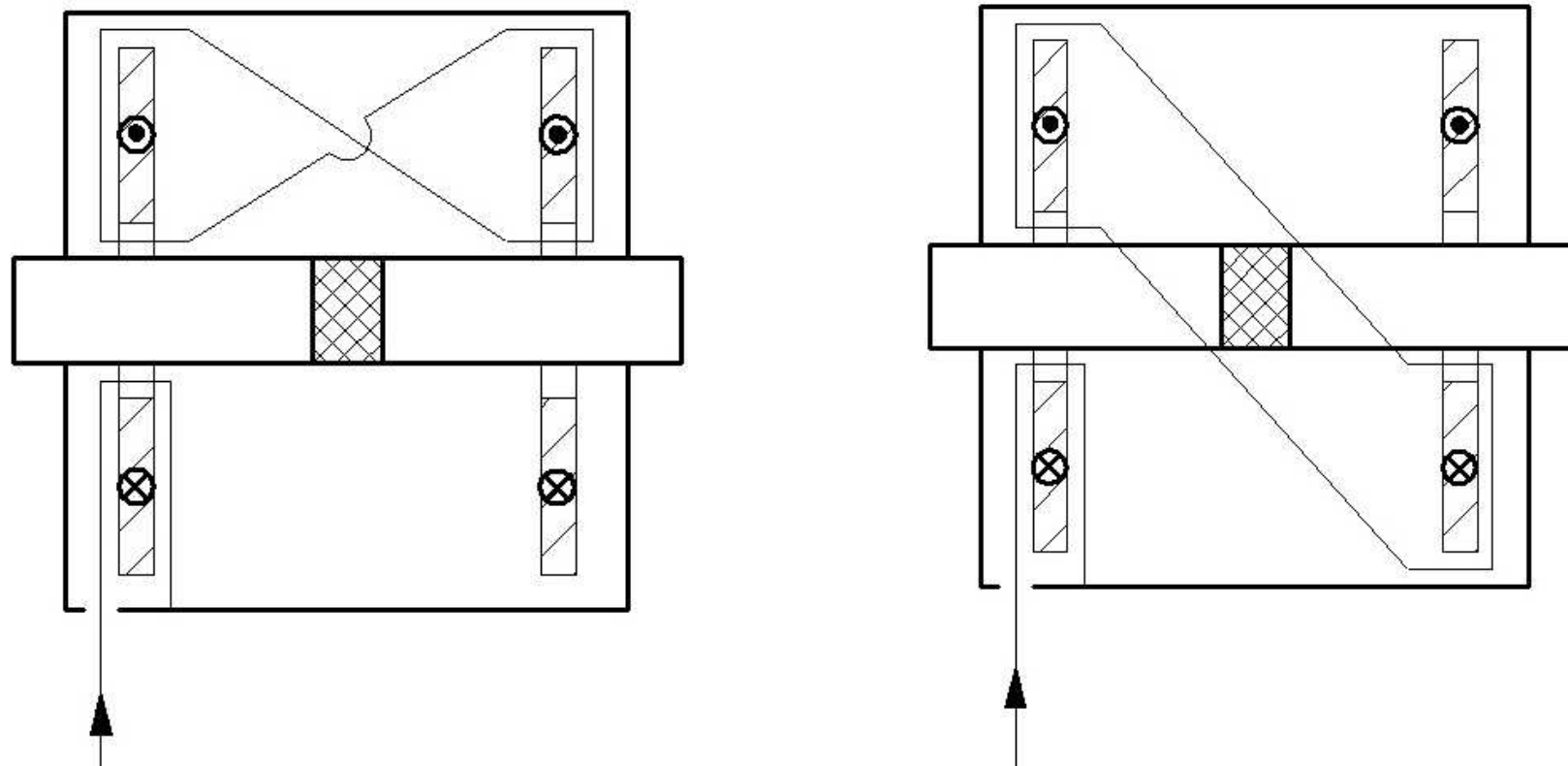


Das Schema der SIS18-Ferritkavität mit Tetrodenverstärker

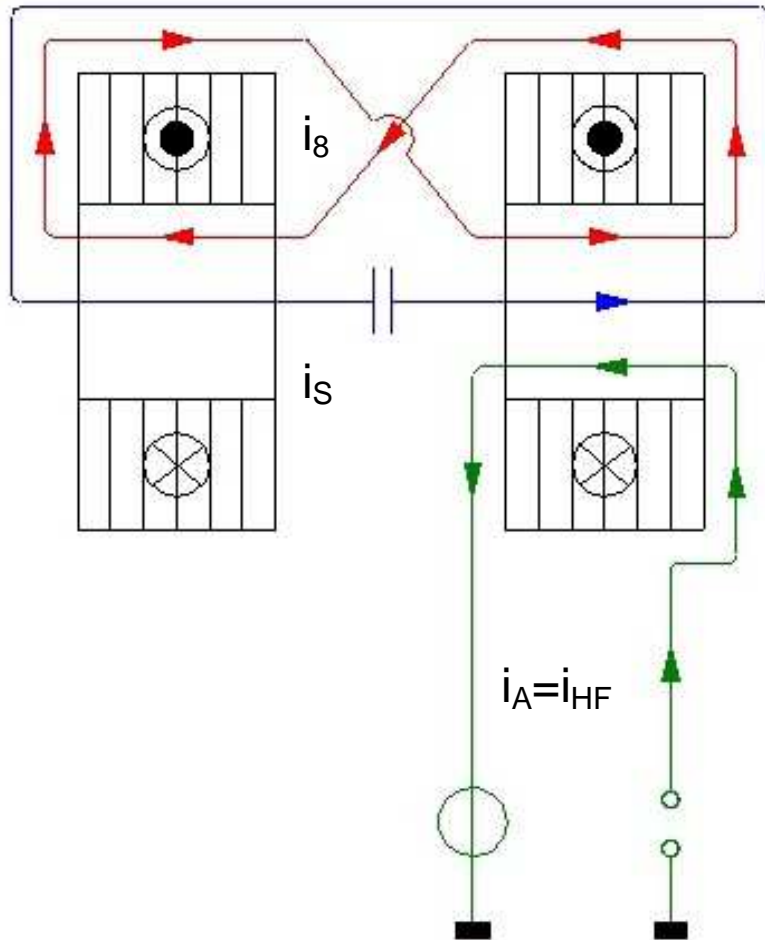
Ein vereinfachtes Kavitätenmodell zur Auswertung der ersten und zweiten Maxwellschen Gleichung ist nachfolgend gezeigt:



Die Einkoppelschleife (grün) koppelt die HF vom Generator in die Kavität ein. Die achtförmige Schleife sorgt dafür, dass beide Ringkernstapel fest miteinander verkoppelt werden und die gleiche Flussrichtung zueinander haben. Nachstehend eine Verdeutlichung der Funktion der Achterschleife.



Die Auswertung der ersten Maxwellschen Gleichung am vereinfachten Kavitätenmodell soll nun durchgeführt werden. Die Lösungen ergeben sich unter Berücksichtigung der Randbedingung, dass an den elektrisch leitenden Wänden die elektrischen Feldkomponenten parallel zur Wandoberfläche und die magnetischen Feldkomponenten senkrecht zur Wandoberfläche verschwinden



Wir wenden nun die erste Maxwellsche Gleichung an

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{ges}$$

Beim rechten Ringkernstapel ergibt sich

$$H_{\varphi} 2\pi r = -i_A + i_s + i_8 = 0$$

Beim linken Stapel ergibt sich

$$H_{\varphi} 2\pi r = i_s - i_8 = 0$$

Zieht man beide Gleichungen voneinander ab so gilt

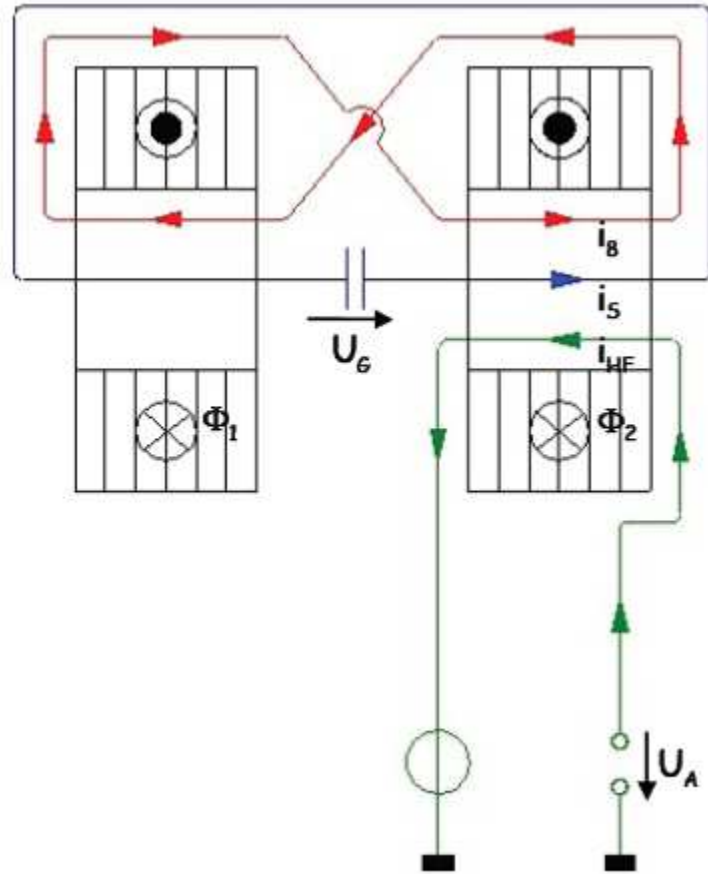
$$i_A + 2i_8 = 0$$

oder
$$i_8 = \frac{i_A}{2}$$

Das heißt, die achtförmige Schleife führt den halben HF-Strom. Für das azimuthale Magnetfeld gilt

$$H_{\varphi} 2\pi r = -\frac{i_{HF}}{2} + i_s$$

Das kann man benutzen die Gapspannung und die Kavitätenimpedanz auszurechnen:



Die Gapspannung ist mit ϕ = magnetischer Fluss

$$U_g = -i\omega 2 \cdot \Phi = -i\omega 2 \cdot \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -i\omega 2 \frac{\mu_0 \mu_r l_{res}}{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} H_\phi dr$$

$$= -i\omega 2 \frac{\mu_0 \mu_r l_{res}}{2\pi} \left(-\frac{i_{HF}}{2} + i_s \right) \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

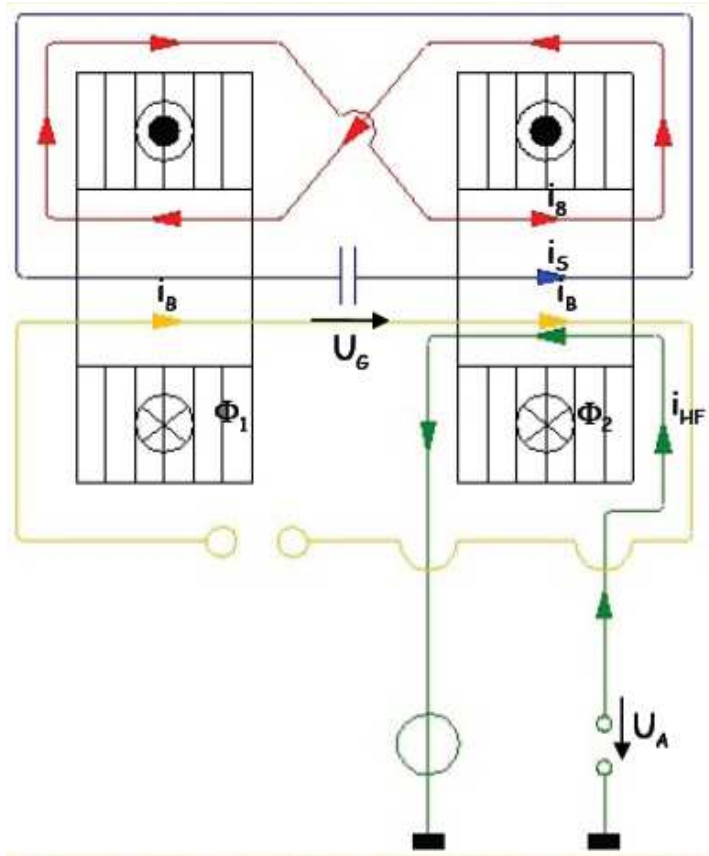
Dabei sind r_a und r_i die Radien der Ferritkerne.

Die Resonatorimpedanz ist dann

$$U_g = -2i_{ges} \cdot Z = -2 \left(-\frac{i_{HF}}{2} + i_s \right) \cdot Z$$

$$\rightarrow i_s = \frac{U_g}{Z_g} \Rightarrow Z_{res} = \frac{U_g}{i_{HF}} = \frac{Z}{1 + 2 \frac{Z}{Z_g}} \quad \text{oder} \quad U_g = i_{HF} \frac{Z}{1 + 2 \frac{Z}{Z_g}}$$

Gapspannung unter Einfluss des Strahlstroms:



Unter Berücksichtigung des Stroms des Teilchenstrahls, muss der Gesamtstrom zur Berechnung der Gap-Spannung modifiziert werden.

$$U_g = -2i\omega \cdot \Phi = -2Z \left(i_b - \frac{i_{HF}}{2} + i_s \right) = -2Z \left(i_b - \frac{i_{HF}}{2} + \frac{U_g}{Z_G} \right)$$

$$U_g = \frac{2Z}{1 + 2 \frac{Z}{Z_g}} \left(\frac{i_{HF}}{2} - i_b \right) = Z_{Kav} \cdot i_{HF} - 2Z_{Kav} \cdot i_b$$

Der Strahl entnimmt dem Resonator Leistung und vermindert dadurch die gap-Spannung. Daher muss mehr HF-Leistung eingespeist werden --> **Beam loading**

8.2. Phasenfokussierung und TT

Die HF-Beschleunigung kann nur funktionieren, wenn die Teilchen longitudinal in Pakete (Bunche) gebündelt sind, ein Auseinanderlaufen der Teilchenpakete verhindert wird und die Synchronisation der Teilchenpakete mit dem beschleunigenden HF-Feld erhalten bleibt. → **Phasenfokussierung**

Immer dann, wenn die Teilchen mit unterschiedlichem Impuls unterschiedliche Laufzeiten haben, tritt die Phasenfokussierung in Erscheinung. Linearbeschleuniger, Synchrozyklotron, Synchrotron und Mikrotron sind z.B. HF-Beschleuniger mit Phasenfokussierung. Immer dann, wenn auch Teilchen mit unterschiedlichem Impuls gleiche Laufzeiten (Isochron Modus in Ringen) haben, entfallen die Notwendigkeit und die Möglichkeit der Phasenfokussierung. Das Isochronzyklotron ist z. B. ein HF-Beschleuniger ohne Phasenfokussierung.

Synchronisationsbedingung: $\omega_{HF} = h \cdot \omega_s$

wobei ω_s die Kreisfrequenz des Teilchens ist und ω_{HF} die HF-Frequenz der Beschleunigungscavities darstellt. h ist die Harmonische Zahl

Der Fahrplan für die Hochbeschleunigung wird von der Magnetfeldrampe für die Ablenkmagnete vorgegeben. Aus der Geschwindigkeit, mit der das Magnetfeld der Ablenkmagnete hochgefahren wird, ergibt sich für das synchrone Teilchen der Energiezuwachs $[\Delta E_s]_U$ pro Umlauf.

$$[\Delta E_s]_U = C_s \frac{dp_s}{dt} \quad ; \quad C_s = \text{Umlauflänge Synchroneteilchen}$$

$$\text{mit } p_s = q \cdot R \cdot B \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_s}{dt} = q \cdot R \cdot \dot{B}$$

$$\Delta p_s = q \cdot R \cdot \dot{B} \tau_s = q \cdot R \cdot \dot{B} \cdot \frac{C_s}{c\beta} \quad \rightarrow \quad E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad \Rightarrow \quad \Delta E = c\beta \cdot \Delta p$$

$$\Delta E = c\beta \cdot \Delta p_s = q \cdot R \cdot \dot{B} \cdot C_s = \frac{dp_s}{dt} \cdot C_s$$

Wir ermitteln nun den Energiegewinn beim Durchqueren eines Beschleunigungsspaltes.

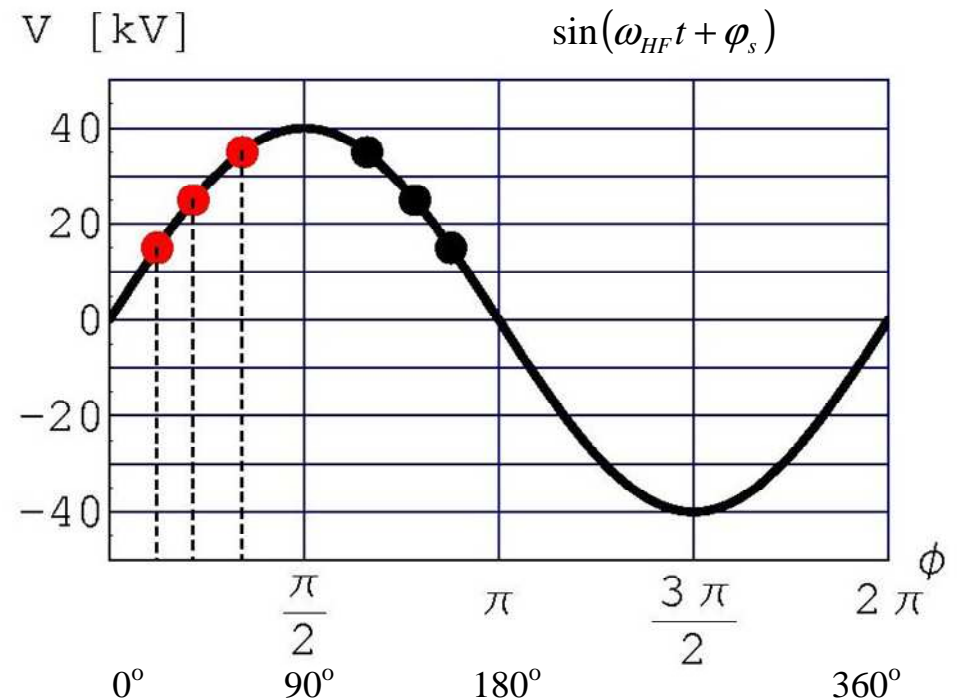
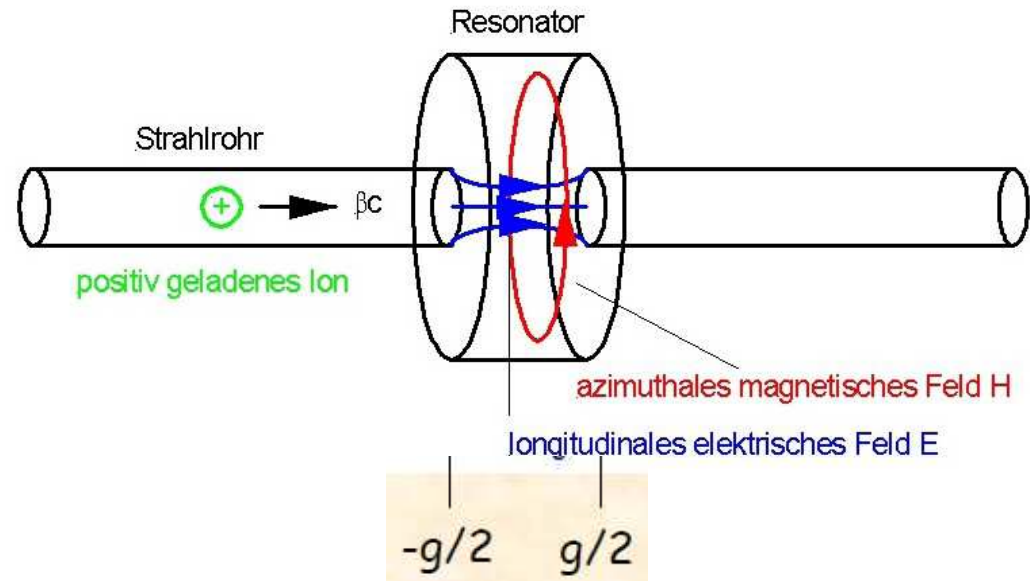
Das elektrische Wechselfeld ist

$$E_s(0, s, t) = E_s(0, s) \sin(\omega_{HF} \cdot t + \varphi_s)$$

$$\frac{dp_s}{dt} = qE_s(0, s, t) = qE_s(0, s) \sin(\omega_{HF} \cdot t + \varphi_s)$$

Phasendefinition Ringbeschleuniger:
Diese folgt einer Sinusfunktion und nicht wie bei den Linearbeschleunigern einer Kosinusfunktion.

D.h. Nullgrad Sollphase ist der Nulldurchgang und nicht wie bei den Linac Gaps das Maximum der Beschleunigungsspannung.



$$\Delta E_s^{HF} = q \int_{-g/2}^{g/2} E_s(0, s) \sin(\omega_{HF} \cdot t + \varphi_s) ds = q \int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) [\sin(\omega_{HF} \cdot t) \cos \varphi_s + \cos(\omega_{HF} \cdot t) \sin \varphi_s] ds$$

Mit $E_0 = \frac{1}{g} \int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds$ folgt

$$\Delta E_s^{HF} = q \cdot g \cdot E_0 \left[\frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \sin(\omega_{HF} \cdot t) ds}{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds} \cos \varphi_s + \frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \cos(\omega_{HF} \cdot t) ds}{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds} \sin \varphi_s \right] = q \cdot g \cdot E_0 T \sin \varphi_s$$

mit

$$T = \left[\frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \sin(\omega_{HF} \cdot t) ds}{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds} \cot \varphi_s + \frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \cos(\omega_{HF} \cdot t) ds}{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds} \right] \leq 1$$

Dies ist der sogenannte **Transit-Time-Factor (TTF)**. $E_0 \cdot g$ ist die durchfallene Spannung für ein Teilchen, wenn sich das elektrische Feld zeitlich nicht ändert. Der TTF misst das Verhältnis zwischen dem realen Energiegewinn des Teilchens zu dem in einem dc-Feld mit der Spannung $E_0 g T \sin \varphi_s$.

Der TTF ist ein Maß für die Reduzierung des Energiegewinns durch das zeitlich variierende elektrische

Feld im Spalt. Nun gilt $\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \sin(\omega_{HF} \cdot t) ds = 0$, wenn das Feld symmetrisch zu $s=0$ ist, denn $\sin(\omega_{HF} \cdot t)$ ist antimetrisch in s . Damit erhält man für den TTF:

$$T = \left[\frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \cos(\omega_{HF} \cdot t) ds}{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds} \right] \leq 1$$

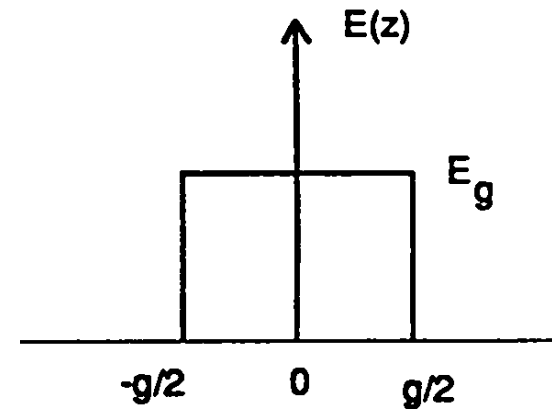
Ist der Geschwindigkeitszuwachs gering, so gilt $\omega_{HF} \cdot t = \omega \cdot \int \frac{ds}{v(s)} = \omega \cdot \frac{s}{v(s)} = \frac{2\pi \cdot s}{T_{HF} \beta c} = \frac{2\pi \cdot s}{\beta \lambda}$

$\beta \lambda$ ist der Weg, den ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\beta \cdot c$ in einer HF-Periode zurücklegt.

Damit und für ein konstantes Feld folgt:

$$T = \frac{E_{s0} \int_{-g/2}^{g/2} \cos\left(\frac{2\pi \cdot s}{\beta\lambda}\right) ds}{E_{s0} g}$$

$$= \frac{\beta\lambda}{2\pi \cdot g} \left[\sin \frac{2\pi}{\beta\lambda} s \right]_{-g/2}^{g/2} = \frac{\beta\lambda}{\pi \cdot g} \sin \frac{\pi \cdot g}{\beta\lambda}$$



Der Energiegewinn durch einen Resonator bei einem Umlauf ist

$$\Delta E_s^{HF} = q \cdot g \cdot E_0 T \sin \varphi_s = q \cdot U_{eff} \sin \varphi_s = q \cdot R \dot{B} \cdot C_s \rightarrow U_{eff} \sin \varphi_s = R \dot{B} \cdot C_s$$

Beispiel SIS18: $R = 10$ m, $C_s = 216,72$ m, $\dot{B} = 10$ T/s

$$\Rightarrow U_{eff} \sin \varphi_s = 22 \text{ kV}$$