

9.) Longitudinale Strahldynamik

Nun betrachten wir den longitudinalen Teil der Strahldynamik. Hier kommt es auf die Synchronisation der Teilchen mit dem beschleunigenden HF-Feld an. Die HF-Beschleunigung kann nur funktionieren, wenn die Teilchen longitudinal in Pakete (Bunche) gebündelt sind, ein Auseinanderlaufen der Teilchenpakete verhindert wird und die Synchronisation der Teilchenpakete mit dem beschleunigenden HF-Feld erhalten bleibt. → **Phasenfokussierung**

Immer dann, wenn die Teilchen mit unterschiedlichem Impuls unterschiedliche Laufzeiten haben, tritt die Phasenfokussierung in Erscheinung. Linearbeschleuniger, Synchrozyklotron, Synchrotron und Mikrotron sind z.B. HF-Beschleuniger mit Phasenfokussierung. Immer dann, wenn auch Teilchen mit unterschiedlichem Impuls gleiche Laufzeiten (Isochron Modus in Ringen) haben, entfallen die Notwendigkeit und die Möglichkeit der Phasenfokussierung. Das Isochronzyklotron ist z. B. ein HF-Beschleuniger ohne Phasenfokussierung.

Synchronisationsbedingung: $\omega_{HF} = h \cdot \omega_s$

wobei ω_s die Kreisfrequenz des Teilchens ist und ω_{HF} die HF-Frequenz der Beschleunigungscavities darstellt. h ist die Harmonische Zahl

Der Fahrplan für die Hochbeschleunigung wird von der Magnetfeldrampe für die Ablenkmagnete vorgegeben. Aus der Geschwindigkeit, mit der das Magnetfeld der Ablenkmagnete hochgefahren wird, ergibt sich für das synchrone Teilchen der Energiezuwachs $[\Delta E_s]_U$ pro Umlauf.

$$[\Delta E_s]_U = C_s \frac{dp_s}{dt} \quad ; \quad C_s = \text{Umlauflänge Synchronenteilchen}$$

$$\text{mit } p_s = q \cdot R \cdot B \Rightarrow \frac{dp_s}{dt} = q \cdot R \cdot \dot{B}$$

$$\Delta p_s = q \cdot R \cdot \dot{B} \tau_s = q \cdot R \cdot \dot{B} \cdot \frac{C_s}{c\beta} \rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \Rightarrow \Delta E = c\beta \cdot \Delta p$$

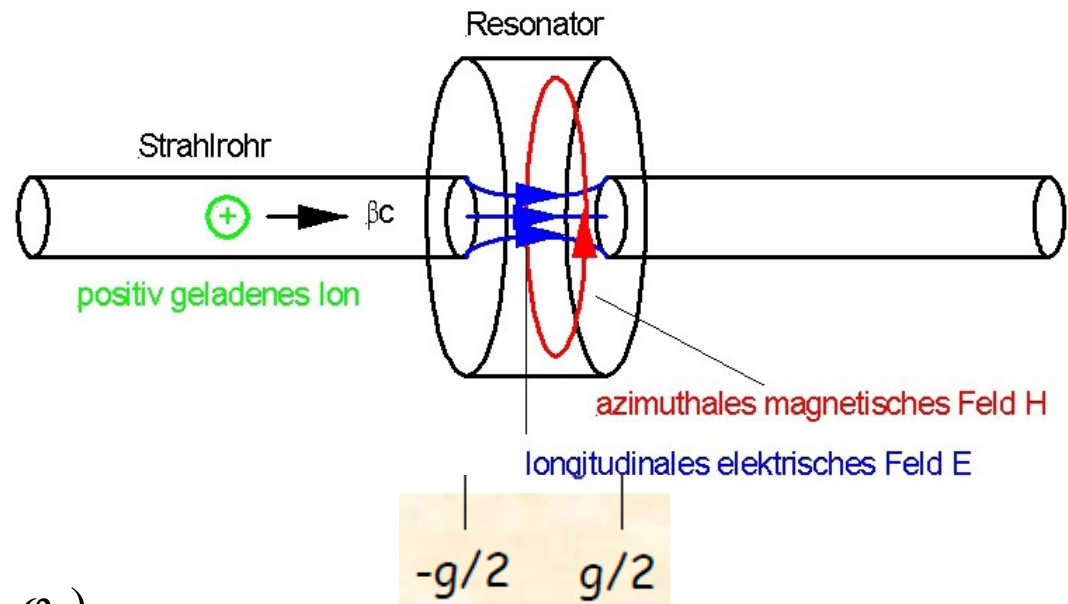
$$\Delta E = c\beta \cdot \Delta p_s = q \cdot R \cdot \dot{B} \cdot C_s = \frac{dp_s}{dt} \cdot C_s$$

Wir ermitteln nun den Energiegewinn beim Durchqueren eines Beschleunigungsspalt.

Das elektrische Wechselfeld ist

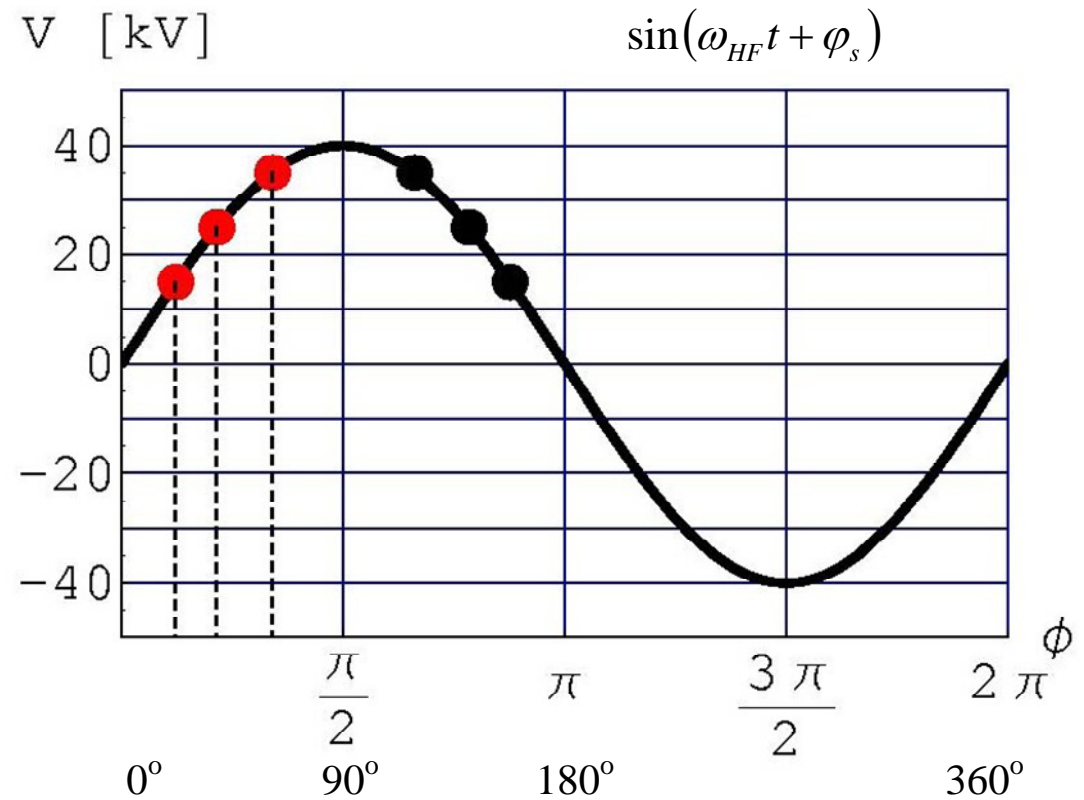
$$E_s(0, s, t) = E_s(0, s) \sin(\omega_{HF} \cdot t + \varphi_s)$$

$$\frac{dp_s}{dt} = qE_s(0, s, t) = qE_s(0, s) \sin(\omega_{HF} \cdot t + \varphi_s)$$



Phasendefinition Ringbeschleuniger:
 Diese folgt einer Sinusfunktion und
 nicht wie bei den Linearbeschleunigern
 einer Kosinusfunktion.

D.h. Nullgrad Sollphase ist der Null-
 durchgang und nicht wie bei den Linac
 Gaps das Maximum der Beschleunigungs-
 spannung.



$$\Delta E_s^{HF} = q \int_{-g/2}^{g/2} E_s(0, s) \sin(\omega_{HF} \cdot t + \varphi_s) ds$$

$$= q \int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) [\sin(\omega_{HF} \cdot t) \cos \varphi_s + \cos(\omega_{HF} \cdot t) \sin \varphi_s] ds$$

Mit $E_0 = \frac{1}{g} \int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds$ folgt

$$\Delta E_s^{HF} = q \cdot g \cdot E_0 \left[\frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \sin(\omega_{HF} \cdot t) ds}{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds} \cos \varphi_s + \frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \cos(\omega_{HF} \cdot t) ds}{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds} \sin \varphi_s \right] = q \cdot g \cdot E_0 T \sin \varphi_s$$

mit

$$T = \left[\frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \sin(\omega_{HF} \cdot t) ds}{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds} \cot \varphi_s + \frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \cos(\omega_{HF} \cdot t) ds}{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds} \right] \leq 1$$

Dies ist der sogenannte **Transit-Time-Factor (TTF)**. $E_0 \cdot g$ ist die durchfallene Spannung für ein Teilchen, wenn sich das elektrische Feld zeitlich nicht ändert. Der TTF misst das Verhältnis zwischen dem realen Energiegewinn des Teilchens zu dem in einem dc-Feld mit der Spannung $E_0 g T \sin \varphi_s$.

Der TTF ist ein Maß für die Reduzierung des Energiegewinns durch das zeitlich variierende elektrische

Feld im Spalt. Nun gilt $\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \sin(\omega_{HF} \cdot t) ds = 0$, wenn das Feld symmetrisch zu $s=0$ ist, denn

$\sin(\omega_{HF} \cdot t)$ ist antimetrisch in s . Damit erhält man für den TTF:

$$T = \left[\frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) \cos(\omega_{HF} \cdot t) ds}{\int_{-g/2}^{g/2} E_s(s) ds} \right] \leq 1$$

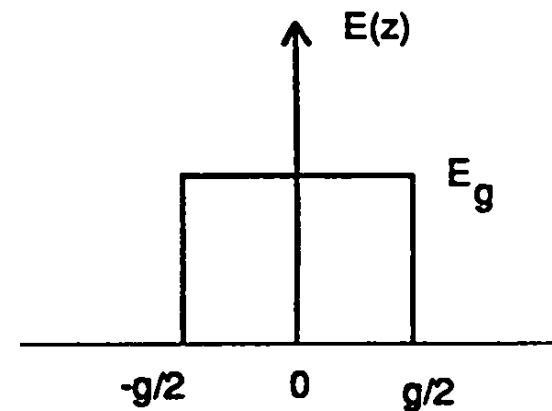
Ist der Geschwindigkeitszuwachs gering, so gilt $\omega_{HF} \cdot t = \omega \cdot \int \frac{ds}{v(s)} = \omega \cdot \frac{s}{v(s)} = \frac{2\pi \cdot s}{T_{HF} \beta c} = \frac{2\pi \cdot s}{\beta \lambda}$

$\beta \lambda$ ist der Weg, den ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\beta \cdot c$ in einer HF-Periode zurücklegt.

Damit und für ein konstantes Feld folgt:

$$T = \frac{E_{s0} \int_{-g/2}^{g/2} \cos\left(\frac{2\pi \cdot s}{\beta \lambda}\right) ds}{E_{s0} g}$$

$$= \frac{\beta \lambda}{2\pi \cdot g} \left[\sin \frac{2\pi}{\beta \lambda} s \right]_{-g/2}^{g/2} = \frac{\beta \lambda}{\pi \cdot g} \sin \frac{\pi \cdot g}{\beta \lambda}$$



Der Energiegewinn durch einen Resonator bei einem Umlauf ist

$$\Delta E_s^{HF} = q \cdot g \cdot E_0 T \sin \varphi_s = q \cdot U_{eff} \sin \varphi_s = q \cdot R \dot{B} \cdot C_s \rightarrow U_{eff} \sin \varphi_s = R \dot{B} \cdot C_s$$

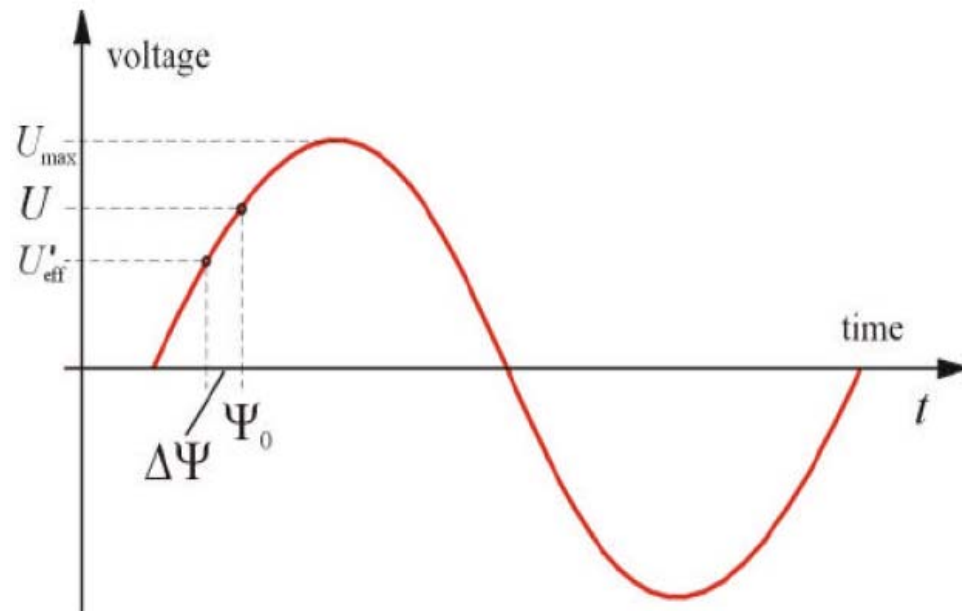
Beispiel SIS18: $R = 10 \text{ m}$, $C_s = 216,72 \text{ m}$, $\dot{B} = 10 \text{ T/s}$

$$\Rightarrow U_{eff} \sin \varphi_s = 22 \text{ kV}$$

9.1. Synchrotronschwingung

Die Phasenfokussierung ist nur möglich, wenn die Kreisfrequenz ω_s mit der die Teilchen umlaufen, vom Impuls p abhängt.

Bei der angezeigten Phasenlage werden die Teilchen, welche zu früh in den Spalt eintreten weniger beschleunigt, als die, die zu spät in diesen eintreten. Da die ersten Teilchen die schnellsten sind und die späteren Teilchen die langsamsten, wird da der Puls zusammengehalten.



Wie wir schon gesehen haben gilt im Ringbeschleuniger

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_s} = \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2} \right) \frac{\Delta p}{p_0} = \eta \frac{\Delta p}{p_s}$$

Über eine Umdrehung variiert die HF-Phase ϕ um $h \cdot 2\pi$ und der Umlaufwinkel θ um 2π .

$$\Rightarrow \Delta\phi = -h \cdot \Delta\theta$$

Das negative Zeichen kommt daher, dass ein Teilchen hinter dem synchronen Teilchen ($\Delta\theta < 0$) zeitlich später im gap ankommt ($\Delta t > 0$, $\Delta\phi > 0$)

$$\Delta\omega_s = \frac{d}{dt} \Delta\theta = -\frac{1}{h} \frac{d}{dt} \Delta\phi = \omega_s \eta_s \cdot \frac{\Delta p}{p_s}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta\phi = -h \cdot \omega_s \eta_s \cdot \frac{\Delta p}{p_s} = -\frac{h \cdot \omega_s \eta_s}{\beta^2} \frac{\Delta E}{E_s}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Delta\phi = -\frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{\beta^2 E_s} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) \quad (*)$$

Es gilt außerdem:

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c\beta} = \frac{qU_{eff}}{\beta c} \sin \varphi_s = \frac{qU_{eff}}{R \cdot \omega} \sin \varphi_s$$

Die Änderung des Impulses pro Sekunde ist dann

$$\dot{p} = \frac{\Delta p}{T_c} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{qU_{eff}}{R \cdot \omega} \sin \varphi_s \quad \Rightarrow \quad R_s \cdot \dot{p}_s = \frac{q}{2\pi} U_{eff} \sin \varphi_s$$

Die Differenz zum Synchroneteilchen ist dann

$$R \cdot \dot{p} - R_s \cdot \dot{p}_s = \frac{q}{2\pi} U_{eff} (\sin \phi - \sin \varphi_s)$$

Entwickeln wir die linke Seite erhalten wir $R \cdot \dot{p} - R_s \cdot \dot{p}_s \approx \frac{d}{dt}(R \cdot \Delta p) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta E}{\omega}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta E}{\omega}\right) = \frac{q}{2\pi} U_{eff} (\sin \phi - \sin \varphi_s) \quad (**)$$

Man kann (*) und (**) auch zusammenfassen zu

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta\phi = -\frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{\beta^2 E_s} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) = -\frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{\beta^2 E_s} \frac{qU_{eff}}{2\pi} (\sin \phi - \sin \varphi_s) \quad (***)$$

Wir entwickeln zunächst für kleine $\Delta\phi$ ($\Delta\phi = \phi - \varphi_s$): $\sin \phi - \sin \varphi_s = \cos \varphi_s \cdot \Delta\phi$

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta\phi = -\frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{\beta^2 E_s} \frac{qU_{eff}}{2\pi} \cos \varphi_s \cdot \Delta\phi = -\omega_{syn}^2 \cdot \Delta\phi$$

Für kleine Abweichungen von der Sollphase vollführen die Teilchen eine harmonische Schwingung, die sogenannte **Synchrotronschwingung**. Die Synchrotronfrequenz beträgt dabei

$$\omega_{syn} = \omega_s \sqrt{\frac{h \cdot \eta_s}{2\pi\beta^2 E_s} qU_{eff} \cos \varphi_s}$$

Die Frequenz der Synchrotronschwingungen, $\nu_{syn} = \omega_{syn}/2\pi$, ist im Vergleich zur Umlauffrequenz $\nu_s = \omega_s/2\pi$ des synchronen Teilchens sehr klein. Für die Zahl der Synchrotronschwingungen pro Umlauf, den longitudinale Tune, erhalten wir

$$Q_{syn} = \frac{\omega_{syn}}{\omega_s} = \sqrt{\frac{h \cdot \eta_s}{2\pi\beta^2 E_s} qU_{eff} \cos \varphi_s}$$

Als Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta\phi + \omega_{syn}^2 \cdot \Delta\phi = 0$$

können wir

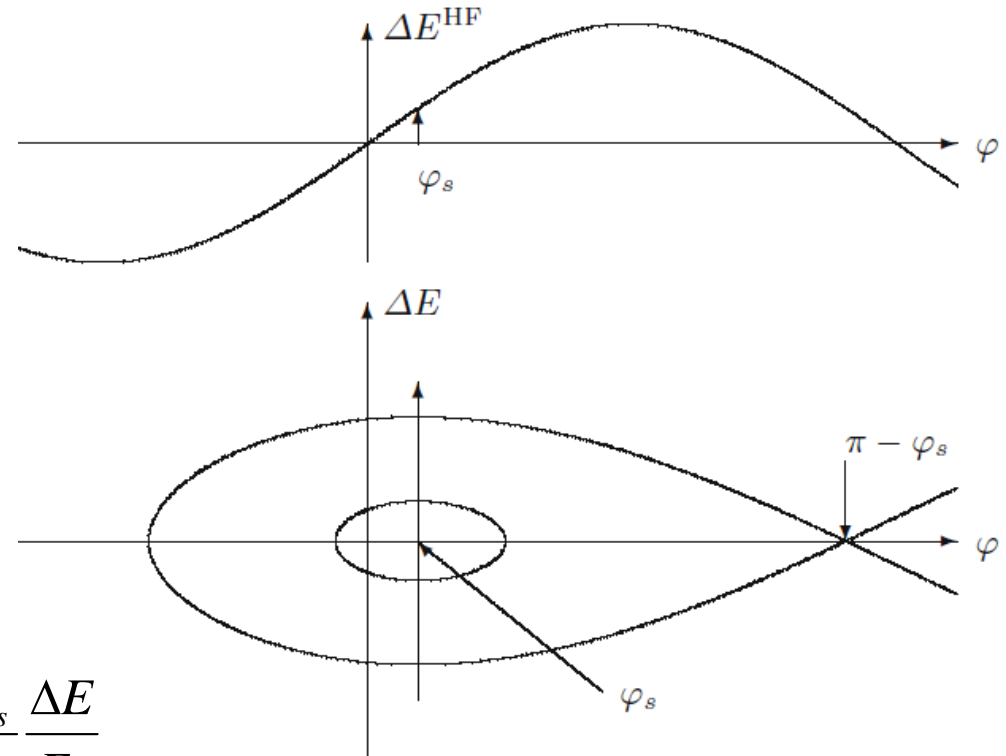
$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\max} \cos(\omega_{syn} \cdot t)$$

ansetzen. In (*) eingesetzt erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \Delta\phi = -\Delta\phi_{\max} \cdot \omega_{syn} \sin(\omega_{syn} \cdot t) = -\frac{h \cdot \omega_s \eta_s}{\beta^2} \frac{\Delta E}{E_s}$$

$$\Delta E = \frac{\omega_{syn} \beta^2 E_s}{\omega_s h \cdot \eta_s} \Delta\phi_{\max} \cdot \sin(\omega_{syn} \cdot t) = \Delta E_{\max} \sin(\omega_{syn} \cdot t)$$

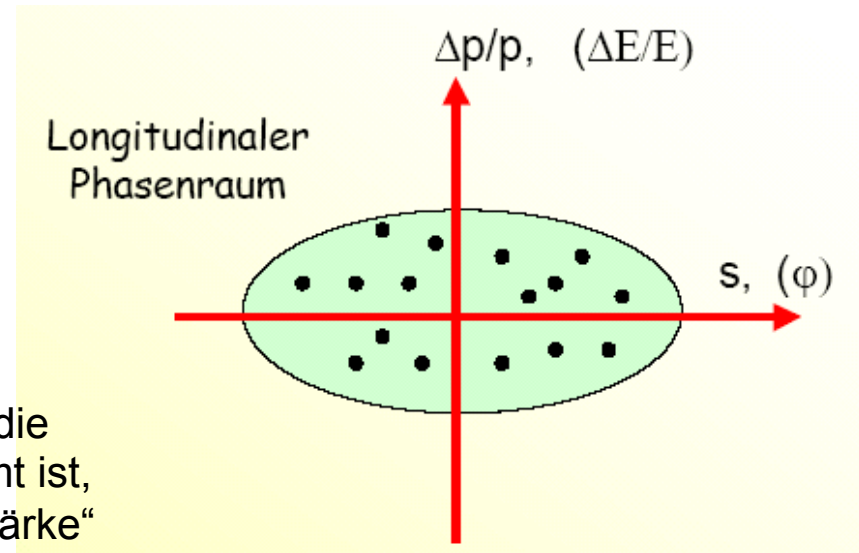
$$\Delta E_{\max} = \frac{\omega_{syn} \beta^2 E_s}{\omega_s h \cdot \eta_s} \Delta\phi_{\max} = Q_{syn} \frac{\beta^2 E_s}{h \cdot \eta_s} \Delta\phi_{\max} \quad \text{mit} \quad \beta^2 E_s = pc\beta = p \cdot v$$



Damit erhält man die Koordinatendarstellung der longitudinalen Emittanzellipse:

$$\left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\max}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta E}{\Delta E_{\max}} \right)^2 = 1$$

Es ist interessant, die Synchrotronschwingung im Hinblick auf das Zusammenspiel der Parameter zu diskutieren. Bei einer vorgegebenen Lattice-Struktur des Synchrotrons und einem vorgegebenen Teilchenimpuls p_s sind die Größen η_s , ω_s und v_s festgelegt. Der Energiegewinn pro Umlauf, der durch die Hochfahrgeschwindigkeit der Ablenkmagnete bestimmt ist, legt das Produkt $qU_{\text{eff}} \sin\phi_s$ fest. Die "Fokussierstärke" in der Schwingungsgleichung, d. h. ω_{syn}^2 , ist durch das Produkt $qU_{\text{eff}} \cos\phi_s$ festgelegt. Um bei einer vorgegebenen longitudinalen Emittanz von $\Delta\phi_{\max}\Delta E_{\max}$ die Phasenbreite $\Delta\phi$ klein, d. h. im linearen Bereich der Sinuskurve, zu halten, sollte die Spannungsamplitude U_{eff} möglichst groß und $\sin\phi_s$ möglichst klein gewählt werden.



Eine wichtige Voraussetzung für die Existenz von stabilen Lösungen und das Auftreten von Synchrotronschwingungen ist die Bedingung $\eta_s \cdot \cos\varphi_s > 0$

$$\cos\varphi_s > 0 \text{ für } \eta_s > 0 \text{ (} \gamma_s < \gamma_{\text{tr}} \text{)}$$

$$\cos\varphi_s < 0 \text{ für } \eta_s < 0 \text{ (} \gamma_s > \gamma_{\text{tr}} \text{)}$$

Daher wird bei der HF beim Überqueren von γ_{tr} eine Phasensprung von 180° erforderlich.

9.2. Synchrotronschwingung - Separatrix

Bei größeren Schwingungsamplituden $\Delta\phi$ verliert die lineare Näherung für kleine $\Delta\phi$ ihre Berechtigung. Daher müssen wir nun die nichtlineare Differenzialgleichung lösen.

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta\phi + \frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{\beta^2 E_s} \frac{qU_{eff}}{2\pi} (\sin \phi - \sin \varphi_s) = \frac{d^2}{dt^2} \Delta\phi + \frac{\omega_{syn}^2}{\cos \varphi_s} (\sin \phi - \sin \varphi_s) = 0$$

Durch Multiplikation mit $\frac{d}{dt} \Delta\phi$ und Integration erhält man

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \Delta\phi \right)^2 + \frac{\omega_{syn}^2}{\cos \varphi_s} [-(\cos \phi - \cos \varphi_s) - \sin \varphi_s \cdot \Delta\phi] = const.$$

$$\left(\frac{\frac{d}{dt} \Delta\phi}{\omega_{syn}} \right)^2 - 2 \frac{(\cos \phi - \cos \varphi_s) + \sin \varphi_s \cdot \Delta\phi}{\cos \varphi_s} = K_0 \quad \text{wobei} \quad \frac{\frac{d}{dt} \Delta\phi}{\omega_{syn}} = - \frac{h \cdot \omega_s \eta_s}{\beta^2 E_s \omega_{syn}} \Delta E \sim \Delta E \quad \text{ist.}$$

Für kleine Werte von K_0 in erhalten wir die ellipsenförmigen Trajektorien im longitudinalen Phasenraum, die wir bereits in 9.1 abgeleitet haben. Für größere Werte werden die Ellipsen

fischähnlich deformiert. Die Grenzlinie zwischen dem stabilen und dem instabilen Bereich wird durch die sogenannte **Separatrix** markiert.

Die Amplitude einer Synchrotronschwingung ist durch die beiden Umkehrpunkte der Schwingung, d. h. die Extremwerte ϕ_1 und ϕ_2 , gekennzeichnet.

Diese Extremwerte erhält man durch

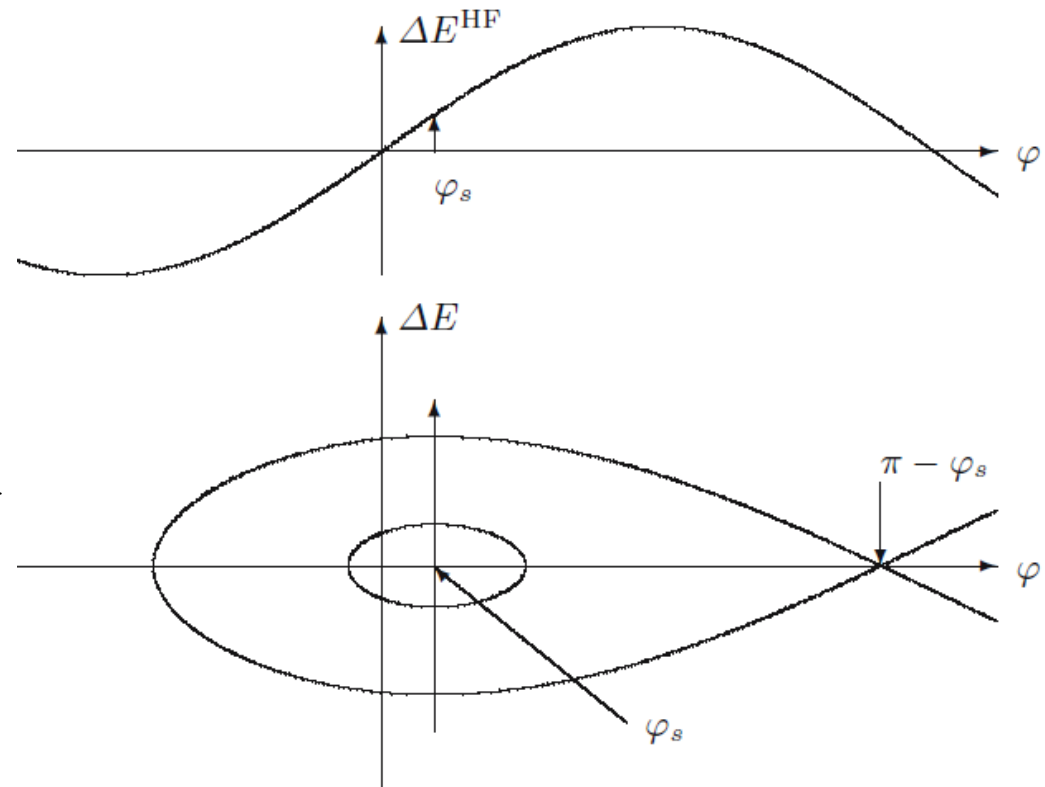
$$\frac{d}{dt} \Delta\phi = 0$$

$$K_0 = -2 \frac{\cos \phi_{1,2} - \cos \varphi_s + \sin \varphi_s \cdot (\phi_{1,2} - \varphi_s)}{\cos \varphi_s}$$

Die Separatrix gibt die maximal mögliche Energieabweichung ΔE_{\max} vor und markiert damit die Energieakzeptanz.

Eine größere Abweichung $\Delta\phi$ als $\pi - \varphi_s$ kann es nicht geben, sonst gerät das Teilchen in die negative Halbwelle. Daher ist $\phi_1 = \pi - \varphi_s$ und damit ergibt sich K_0 und damit auch aus der obigen Gleichung ϕ_2 .

$$K_0 = -2 \frac{\cos(\pi - \varphi_s) - \cos \varphi_s + \sin \varphi_s \cdot (\pi - 2\varphi_s)}{\cos \varphi_s} = 4 - (2\pi - 4\varphi_s) \tan \varphi_s$$



und damit

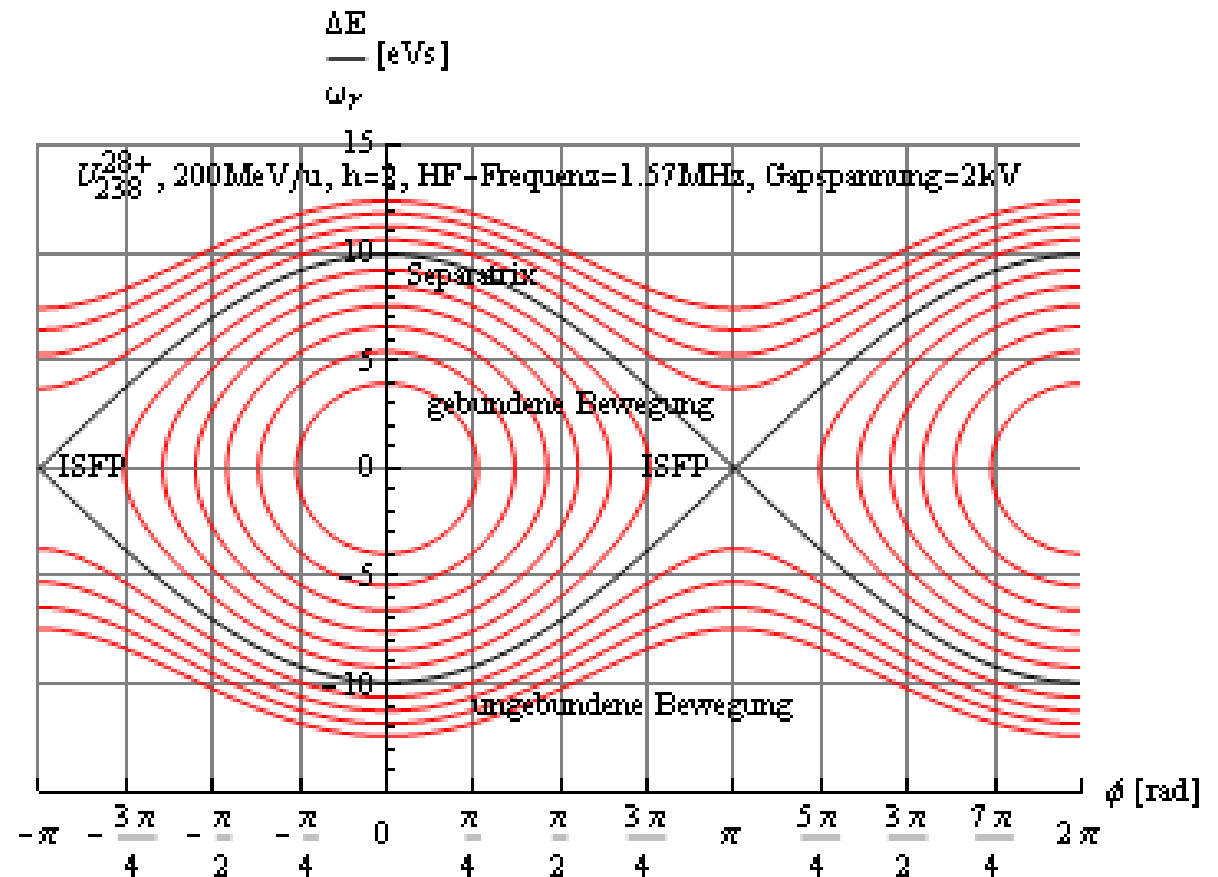
$$\cos \phi_2 - \cos \varphi_s + \sin \varphi_s \cdot (\phi_2 - \varphi_s) = \frac{\cos \varphi_s}{-2} [4 - (2\pi - 4\varphi_s) \tan \varphi_s]$$

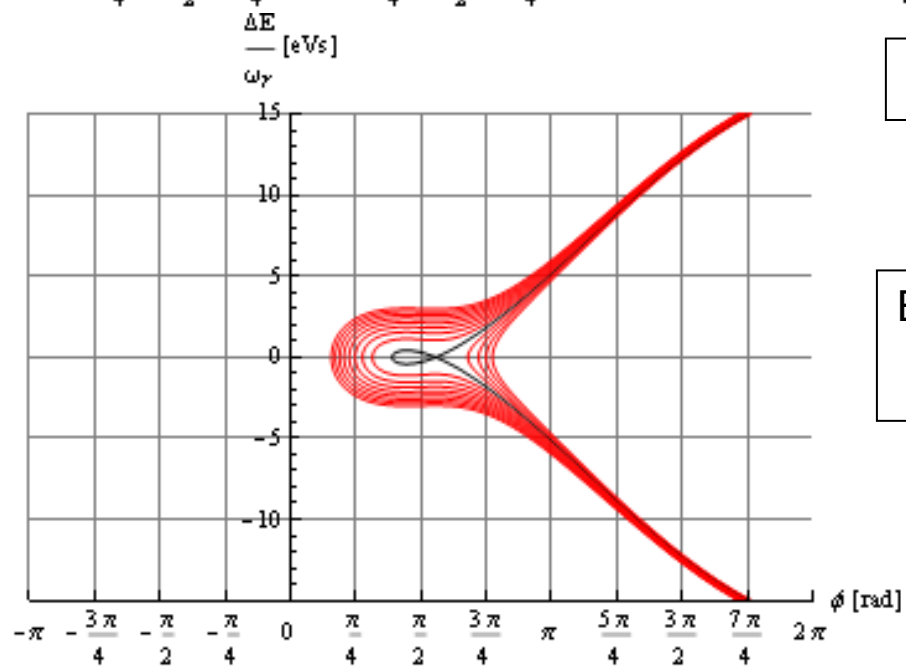
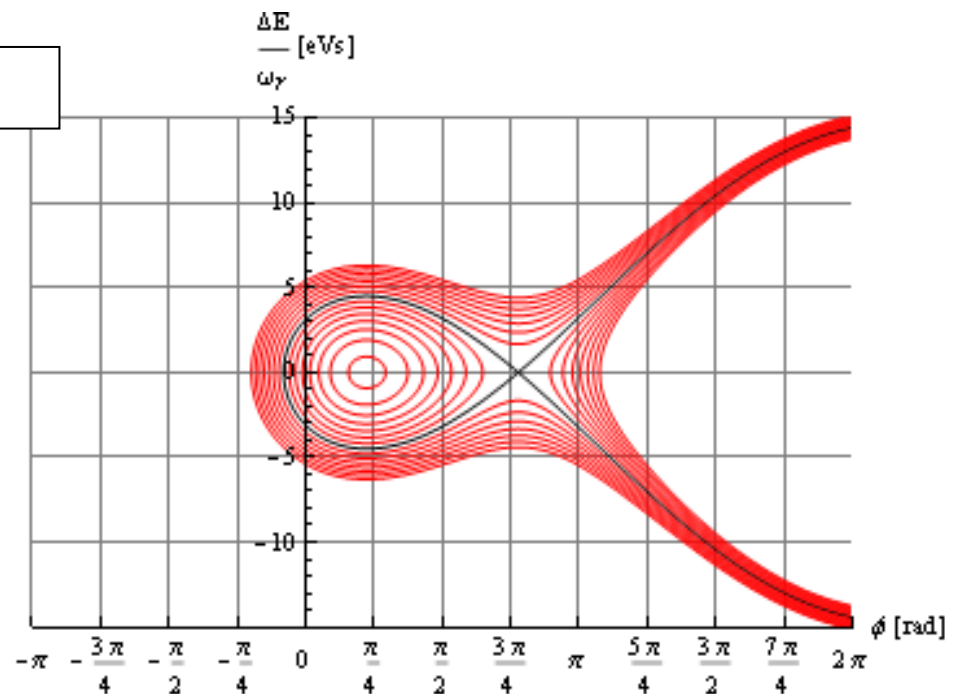
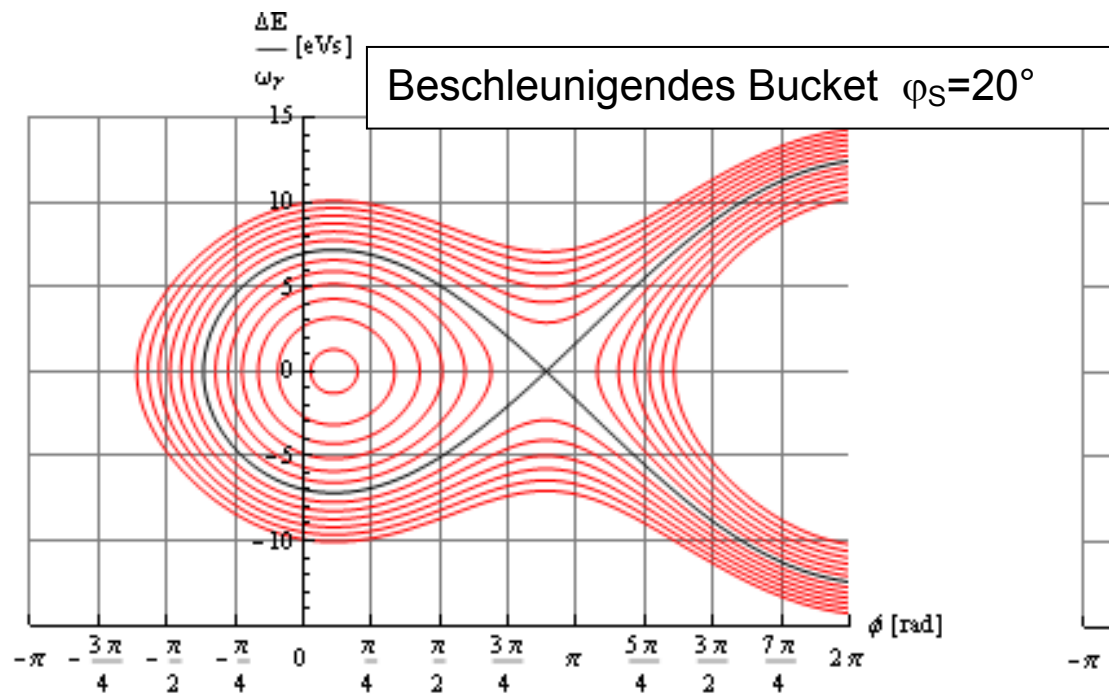
$$\begin{aligned} &\cos \phi_2 - \cos \varphi_s + \sin \varphi_s \cdot \phi_2 \\ &= (\pi - \varphi_s) \sin \varphi_s - \cos \varphi_s \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \varphi_s = 0 &\Rightarrow \phi_1 = \pi \\ \Rightarrow \cos \phi_2 &= -\cos 0 \\ \Rightarrow \phi_2 &= -\pi \end{aligned}$$

Die Kreisfrequenz für große Amplituden Ω_{syn} wird umso kleiner, je größer die Amplituden sind, d.h. je größer $\phi_1 - \phi_2$ ist.





9.3. Longitudinale Emittanz

In der $\Delta\phi$, ΔE Phasenraumebene folgen die Teilchenbewegungen einer Hamiltonfunktion

$$H(\phi, W) = \frac{h \cdot \omega_s^2 \eta_s}{2\beta^2 E_s} W^2 - \frac{qU_{eff}}{2\pi} [\cos \phi - \cos \varphi_s + \sin \varphi_s (\phi - \varphi_s)] \quad \text{mit} \quad W = \frac{\Delta E}{\omega_s}$$

Daher ist nach Liouville die von den Teilchen besetzte Phasenraumfläche konstant. Ist die Fläche konstant klein ggü. der Separatrix, dann kann auch diese durch eine Ellipse umrandet werden.

$$A_{\phi, E} = \pi \cdot \varepsilon_{long} = \pi \cdot \Delta\varphi_0 \Delta E_0$$

Zur Beschreibung der Teilchenbewegung longitudinal werden neben $\Delta\phi$ und ΔE auch gerne andere Koordinaten verwendet.

$$l = -\frac{v_s}{\omega_{HF}} \Delta\phi = -\frac{v_s}{h\omega_s} \Delta\phi = -\frac{C_s}{h \cdot 2\pi} \Delta\phi$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega_{HF}} = \frac{\Delta\phi}{h\omega_s} \quad \text{und} \quad \Delta E = v_s \Delta p$$

In Analogie zur transversalen Emittanz wird meistens die Ortsabweichung und die relative Impulsabweichung $\delta = \Delta p/p_s$ betrachtet.

$$\left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta E}{\Delta E_{\max}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\delta_{\max}}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\delta_{\max}}{l_{\max}}\right)l^2 + \left(\frac{l_{\max}}{\delta_{\max}}\right)\delta^2 = l \cdot \delta_{\max} \Rightarrow \frac{l^2}{\beta_{\text{long}}} + \beta_{\text{long}}\delta^2 = \varepsilon_{\text{long}}$$

Die Maschinenellipse in longitudinale Richtung ist aufrecht $\alpha_{\text{long}} = 0$. Die Betafunktion ist

$$\beta_{\text{long}} = \left| \frac{l_{\max}}{\delta_{\max}} \right| = \frac{C_s}{h \cdot 2\pi} \Delta\phi_{\max} \frac{p_s}{\Delta p_{\max}} = \frac{C_s}{h \cdot 2\pi} \cdot \frac{p_s v_s}{\Delta E_{\max}} \Delta\phi_{\max} = \frac{\eta_s C_s}{2\pi \cdot Q_{\text{syn}}}$$

$$\beta_{\text{long}} = \frac{\eta_s C_s}{2\pi \cdot Q_{\text{syn}}} = C_s \sqrt{\frac{\eta_s \beta^2 E}{2\pi \cdot h q U_{\text{eff}} \cos \varphi_s}}$$

β_{long} ist proportional zum Maschinenumfang und antiproportional zur Zahl der Synchrotronschwingungen pro Umlauf. Ist β_{long} klein dann ist die Phasenfokussierung stark.