

6.) Dispersion

Die transversalen Bewegungsgleichungen in linearer Näherung in einem Beschleuniger haben wir abgeleitet zu

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho} - k(s) \right) \cdot x = h(s) \cdot \delta \quad \text{mit} \quad h(s) = \frac{1}{\rho(s)} \quad ; \quad \delta = \frac{\Delta p}{p_0}$$
$$y'' + k(s) \cdot y = 0$$

Man kann nun die beiden Gleichungen in Hillsche-DGLs umwandeln, indem man folgende Beziehungen nutzt:

$$k_x(s) = k_m^2(s) + \frac{1}{\rho^2(s)} \quad ; \quad k_y(s) = -k_m^2(s)$$

$$\rightarrow \quad x'' + k_x(s) \cdot x = h \cdot \delta \quad , \quad y'' + k_y(s) \cdot y = 0$$

Für die allgemeine Lösung für monoenergetische Teilchen ($\delta = 0$) erhalten wir homogene DGLs, deren Lösungen wir durch cosinus- und sinusartige Funktionen ermitteln konnten. Daraus haben wir die lineare Strahloptik abgeleitet:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} c(z) & s(z) \\ c'(z) & s'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_0}$$

Beispiele für Quadrupole und dünne Linsen wurden gezeigt. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $x'' + k_x(s) \cdot x = h \cdot \delta$ lässt sich als Linearkombination einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL $x_D(s) = D(s) \cdot \delta$ mit der allgemeinen Lösung der homogenen DGL schreiben, wobei $x(s)$ die normale Betatronschiwingung ist, also die Lösung der homogenen Hillschen DGL darstellt:

$$x_\delta(s) = x_D(s) + x(s)$$

$$x_\delta'' + k_x \cdot x_\delta = h \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad x'' + x_D'' + k_x x + k_x x_D = h \cdot \delta$$

Da $x'' + k_x x = 0$ ergibt sich $x_D'' + k_x x_D = h \cdot \delta$ und somit

$$D'' \delta + k_x D \delta = h \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad D''(s) + k_x(s) D(s) = h(s)$$

$D(s)$ wird auch **Dispersionsfunktion** genannt. Die Dispersion beschreibt den Einfluss einer Impulsabweichung auf den Ort und den Winkel in transversale Richtung:

$$D_x(s) \delta_0 = x_D \quad , \quad D'_x(s) \delta_0 = x'_D$$

Die Lösung der homogenen DGL ergibt sich aus $D_h(s) = D_0 \cdot C(s) + D'_0 \cdot S(s)$. Zusammen mit der partikulären Lösung der inhomogenen DGL erhält man

$$D(s) = D_0 \cdot C(s) + D'_0 \cdot S(s) + d(s)$$

Die Dispersionsfunktion erfüllt die Startbedingungen $D(0) = 0$, $D'(0) = 0$.

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen eine spezielle Bahn $D(s)$ zu bestimmen mit $\delta = 1$. Diese nennt man **Dispersionsbahn**. Da die Dispersion von den Ablenkmagneten dominiert wird gilt mit

$$k_x(s) = \frac{1}{\rho^2(s)} = h^2 \quad ; \quad D''(s) + h^2 D(s) = h$$

Da $h = \text{const.}$ ist die partikuläre Lösung $D_p = C = \text{const.}$ Und damit folgt $h^2 C = h \Rightarrow C = \frac{1}{h}$

$$D(s) = A \cdot \cos(hs) + B \cdot \sin(hs) + \frac{1}{h}$$

$$D_0 = A + \frac{1}{h} \Rightarrow A = D_0 - \frac{1}{h} \quad \text{und} \quad D'_0 = B \cdot h \Rightarrow B = \frac{D'_0}{h}$$

$$\Rightarrow D(s) = \left(D_0 - \frac{1}{h}\right) \cdot \cos(hs) + \frac{D'_0}{h} \cdot \sin(hs) + \frac{1}{h}$$

mit $\rho = 1/h$ erhalten wir für den Ablenkmagneten:

$$D(s) = D_0 \cdot \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) + D'_0 \rho \cdot \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + \rho \left(1 - \cos\left(\frac{s}{\rho}\right)\right)$$

$$D'(s) = -\frac{D_0}{\rho} \cdot \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + D'_0 \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) + \sin\left(\frac{s}{\rho}\right)$$

$$\begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) & \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) & \rho \left(1 - \cos\left(\frac{s}{\rho}\right)\right) \\ -\frac{1}{\rho} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) & \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) & -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_0 \\ D'_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies entspricht der Transfermatrix, die wir schon in Vorlesung 2 für den Ablenkmagneten vorgestellt haben. An einer Stelle an der die Dispersion nicht verschwindet, hat ein Teilchen mit

Impulsabweichung $\delta = \frac{\Delta p}{p_0}$ die Gesamtortsablage $x_\delta(s) = x_D(s) + x(s) = x(s) + D(s) \frac{\Delta p}{p}$. Teilchen

mit Impuls-abweichung laufen auf Dispersionsbahnen x_D . Diese Bahnen haben im Allgemeinen eine

andere Länge, als der Sollorbit. D.h. die Bahnlänge im Ringbeschleuniger ist eine Funktion des Impulses.

6.1. Momentum compaction Faktor und γ_{tr}

Das Verhältnis von relativer Bahnlängenänderung $\frac{\Delta C}{C_0}$ zur relativen Impulsänderung δ nennt man auch **Momentum compaction Faktor**:

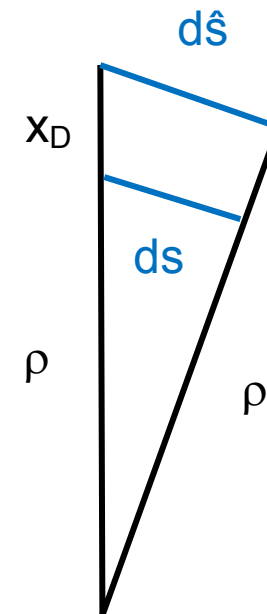
$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} \Rightarrow \alpha_p = \frac{\Delta C / C_0}{\Delta p / p_0}$$

In linearer Näherung liefert $x_D(s) = D(s) \cdot \delta$ nur in den Bereichen der Ablenkmagnete einen wesentlichen

Beitrag zu $\frac{\Delta C}{C_0}$. $d\tilde{s} = \rho + \frac{x_D}{\rho} ds$

$$C + \Delta C = \oint d\tilde{s} = \oint ds + \oint \frac{x_D}{\rho} ds$$

$$\Delta C = \oint h \cdot x_D ds = \frac{\Delta p}{p_0} \oint D(s) h(s) ds = \frac{\Delta p}{p_0} \oint \frac{D(s)}{\rho} ds$$



$$\rightarrow \alpha_p = \frac{1}{C_0} \oint D(s) h(s) ds = \frac{1}{C_0} \oint \frac{D(s)}{\rho} ds$$

Variiert man $D(s)$ mittel der Ionenoptik, so kann man auch α_p verändern. Die Größe α_p ist ein Maß für die Dispersion im Bereich der Ablenkmagnete. Je kleiner $D(s)$, d. h. je kompakter die Bahnen mit unterschiedlichem $\Delta p/p_0$ beieinanderliegen, umso kleiner ist α_p . Nun gibt es ein γ_{tr} , für welches

Ein Synchrotron kann nur funktionieren, wenn $\omega = \omega(p)$, da $\omega = 2\pi v/C$. Damit erhält man

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta C}{C_0} \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p_0} \quad \frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0}$$

Den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsabweichung und Impulsabweichung (relativistisch)

kann man durch $\frac{dp}{dv} = \frac{m_0 d(\gamma\beta)}{d\beta}$ ermitteln.

Damit erhält man den Zusammenhang zwischen relativem Umlauffrequenzunterschied und der relativen Impulsabweichung.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p \right) \frac{\Delta p}{p_0} = \eta \frac{\Delta p}{p_0}$$

Nun gibt es ein γ_{tr} für welches $\eta = \left(\frac{1}{\gamma_{tr}^2} - \alpha_p \right) = 0$ wird. Dies geschieht bei der entsprechenden Übergangsenergie $E_{tr} = \gamma_{tr} m_0 c^2$.

$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2}$ und damit erhalten wir die folgenden Betriebsbereiche:

$$\gamma < \gamma_{tr} \quad \Leftrightarrow \quad \eta > 0 \quad \Delta\omega \text{ wächst mit } \Delta p$$

$$\gamma > \gamma_{tr} \quad \Leftrightarrow \quad \eta < 0 \quad \Delta\omega \text{ nimmt ab mit } \Delta p$$

$$\gamma = \gamma_{tr} \quad \Leftrightarrow \quad \eta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0$$

Damit laufen die Teilchen isochron im Ring um, unabhängig von deren Impuls. Phasenfokussierung und Synchrotronschwingung ist nur möglich, wenn $\gamma \neq \gamma_{tr}$ d.h. $\eta \neq 0$ ist. Daher muss während der Hochbeschleunigung beim Übergang von $\gamma < \gamma_{tr}$ nach $\gamma > \gamma_{tr}$ ein HF-Phasensprung von φ_s nach $\pi - \varphi_s$ stattfinden. Der Übergang ist ein Spezialproblem der Synchrotronbeschleuniger für Ionen, das nicht immer vermieden werden kann.

In einem Linearbeschleuniger ist $\alpha_p = 0$ und damit $\eta = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \varphi = \varphi_s$.

Für extrem relativistische Teilchen strebt η gegen Null, und die Phasenschwingungen "erstarren".

6.2. Transversale Strahldynamik im Ringbeschleuniger

Im periodischen Lattice gilt

$$\begin{pmatrix} x(s+C) \\ x'(s+C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s, s+C) & s(s, s+C) \\ c'(s, s+C) & s'(s, s+C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}(s, s+C) \vec{x} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}(s) \vec{x}$$

wobei C der Umfang des Ringes oder die Länge einer Superperiode ist. Aus der allgemeinen Lösung der **Hillschen Differentialgleichung** erhalten wir (siehe Vorlesung 3) die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ zu

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}(s) = \begin{pmatrix} \cos \Delta\Psi + \alpha(s) \sin \Delta\Psi & \beta(s) \sin \Delta\Psi \\ -\frac{(1 + \alpha^2(s)) \sin \Delta\Psi}{\beta(s)} & \cos \Delta\Psi - \alpha(s) \sin \Delta\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s, s+C) & s(s, s+C) \\ c'(s, s+C) & s'(s, s+C) \end{pmatrix}$$

mit $\mu = \Delta\Psi$ und $\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$ folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{M} &= \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s) \sin \mu & \beta(s) \sin \mu \\ -\gamma(s) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s) \sin \mu \end{pmatrix} = \cos \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \mu \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \\ &= \cos \mu \underline{I} + \sin \mu \underline{J} \end{aligned}$$

Man nennt die Matrix \underline{M} auch die Twiss-Matrix oder Eigenmatrix des Beschleunigers. Der Phasenverschiebung nach einem Umlauf ist μ . Wie wir aus der Betrachtung der Phasenraumfläche wissen, muss $\det(\underline{M}) = 1$ sein. Daher gilt

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha^2 + \beta \cdot \gamma = 1 \quad , \quad \underline{J} \cdot \underline{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\underline{I} \quad , \quad \underline{J}^{-1} = -\underline{J}$$

Für N Umläufe gelten nun:

$$\underline{M}^N = (\cos \mu \underline{I} + \sin \mu \underline{J})^N = \cos N\mu \underline{I} + \sin N\mu \underline{J}$$

Die Strahlen im Ring bleiben nun stabil, wenn \underline{M}^N nicht divergiert. Daher muss μ reell bleiben (sonst werden cos und sin zu cosh und sinh). Damit jedoch erhalten wir als Stabilitätsbedingung:

$$|\cos \mu| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |\text{Tr} \underline{M}| = |\cos \mu + \alpha \sin \mu + \cos \mu - \alpha \sin \mu| = |2 \cos \mu| \leq 2$$

Damit muss der Phasenvorschub $0 \leq \mu \leq \pi$ betragen. Damit können die TWISS Parameter der Ellipse eindeutig festgelegt werden:

$$\underline{M}(s) = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s) \sin \mu & \beta(s) \sin \mu \\ -\gamma(s) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s) \sin \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \cos \mu = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) \quad , \quad \beta = \frac{m_{12}}{\sin \mu} \quad , \quad \alpha = \frac{m_{11} - m_{22}}{2 \sin \mu} \quad , \quad \gamma = -\frac{m_{21}}{\sin \mu}$$

Der Phasenvorschub μ ist durch die Matrix M festgelegt. Da diese Matrix von Startpunkt s abhängt, sind die Größen α , β und γ Funktionen von s . μ hängt nicht von s ab! Durch die optischen Funktionen (Twiss-Parameter in Abhängigkeit von s) wird eine Maschinenellipse, die sogenannte Eigenellipse definiert (Courant-Snyder Ellipse).

$$\gamma(s)x^2 + 2\alpha(s)xx' + \beta(s)x'^2 = \varepsilon$$

Die Größe ε ist dabei ein freier Parameter. Diese Gleichung definiert die Bewegung der Teilchen in der Maschine. Ein Teilchen mit den Koordinaten (x, x') nach jedem Umlauf markiert, ergibt sich eine Folge von Punkten, die entsprechend dem Phasenvorschub μ auf der Ellipse angeordnet sind.

Die durch ein Teilchen mit der Courant-Snyder-Invarianten $\varepsilon = a^2$ definierte Phasenellipse beschreibt das Phasenraumverhalten der Gesamtheit aller Teilchen mit einer Betatronschwingungsamplitude kleiner gleich a .

Die durch (α, β, γ) definierte Form der Maschinenellipse ist eine charakteristische Eigenschaft des Kreisbeschleunigers, d. h. der Maschine. Sie ist durch die Anordnung und Erregung der ionenoptischen Elemente bestimmt. Die Strahlellipse, d. h. die Phasenellipse des zirkulierenden Teilchenstrahles kann sich deutlich von der durch (α, β, γ) definierten Maschinenellipse unterscheiden.

Wenn Strahlellipse $\underline{\sigma}$ und Maschinenellipse $\underline{\sigma}_M$ übereinstimmen, kann man den folgenden Zusammenhang mit σ -Matrix herstellen:

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \underline{\sigma}_M = \varepsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

Wenn ein Ring aus Superperioden der Länge L periodisch aufgebaut ist, genügt es die Twiss-Matrix einer Superperiode zu betrachten $M = R(s, s+L)$. Die optischen Funktionen des Ringes sind dann identisch mit denen der Superperioden. In einem Ringbeschleuniger wird also die Strahlmatrix wie folgt transformiert:

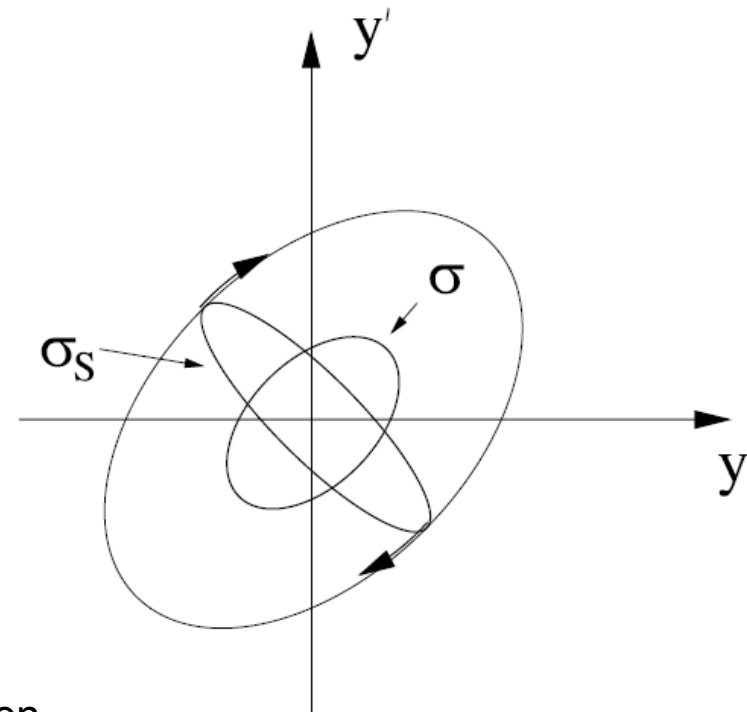
$$\underline{\sigma}_e = \underline{M} \cdot \underline{\sigma}_e \cdot \underline{M}^T$$

$$\rightarrow \underline{M} \cdot \underline{\sigma}_e \cdot \underline{M}^T = (\cos \mu \underline{I} + \sin \mu \underline{J}) \cdot \underline{\sigma}_e \cdot (\cos \mu \underline{I}^T + \sin \mu \underline{J}^T)$$

Mit $\underline{I}^T = \underline{I}$, $\underline{J}^T = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$

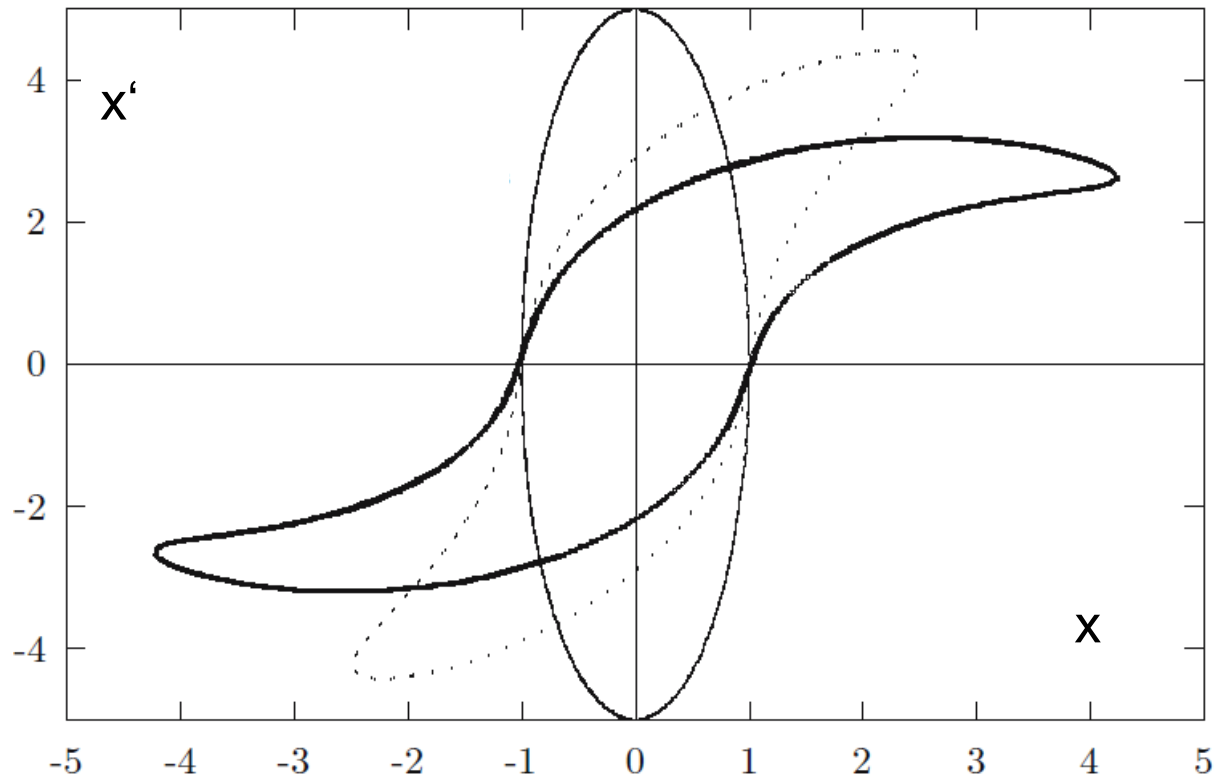
und weiteren Umformungen sieht man, dass die Matrix \underline{M} die Strahlmatrix $\underline{\sigma}_e$ nach einem Umlauf in sich selbst abbildet. Die Strahlmatrix hängt natürlich von dem Punkt s im Beschleuniger ab, von dem aus man den Umlauf startet.

Fehlanpassung bedeutet, die Form der Maschinenellipse σ an der Übergabestelle und die Strahlellipse σ_S dort stimmen nicht in der Orientierung überein. Nach jedem Umlauf dreht sich die Strahlellipse entsprechend dem Betatronphasenvorschub pro Umlauf. Sie überstreicht dabei eine Ellipsenfläche, die wesentlich größer als die Emittanz des Strahles ist.



Anpassung: Der injizierte Strahl sollte möglichst optimal an die Eigenellipse angepasst werden. Ein fehlangepasster Strahl führt u.U. zu dramatisch größeren Betatron- oder Synchrotronschwingungsamplituden.

Bei einem fehlangepassten Strahl kommt es zur Filamentierung der Phasenraumverteilung, welche mit der zunehmenden Zahl von Umläufen stärker wird.



Zur Betatronfunktion kann man zusammenfassend sagen:

$$\mu = \oint \frac{ds}{\beta(s)} \quad \text{und} \quad \alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2} \quad \text{und} \quad \gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} = \frac{1 + \frac{\beta'^2}{4}}{\beta} \quad \text{wobei die Strahlenvelope}$$

$$x_{\max} = \sqrt{\varepsilon\beta(s)} \text{ ist.}$$

6.3. Die periodische Dispersion

In einem Ringbeschleuniger ist auch die Dispersionsfunktion $D(s) = D(s+C)$ und deren Ableitung $D'(s) = D'(s+C)$ periodisch. Aus den oben gezeigten Lösungen erhält man mit einer speziellen Lösung $d(s)$ der inhomogenen DGL

$$D(s) = D_0 C(s) + D'_0 S(s) + d(s)$$

D_0 und D'_0 werden so angepasst, dass die Periodizitätsbedingung erfüllt ist. Außerdem gilt

$$C(s_0) = 1 \quad ; \quad S(s_0) = 0$$

$$C'(s_0) = 0 \quad ; \quad S'(s_0) = 1$$

Um die Darstellung zu vereinfachen bezeichnen wir die Funktionen C und S nach einem Umlauf mit dem Index 1:

$$D(s_0 + C) = D_0 = D_0 C_1 + D'_0 S_1 + d_1 \quad ; \quad D'(s_0 + C) = D'_0 = D_0 C'_1 + D'_0 S'_1 + d'_1$$

$$\rightarrow D_0(1 - C_1) = D'_0 S_1 + d_1 \quad ; \quad D'_0(1 - S'_1) = D_0 C'_1 + d'_1$$

und damit folgt

$$D_0 = \frac{d'_1 S_1 + d_1 (1 - S'_1)}{(1 - C_1)(1 - S'_1) - C'_1 S_1}$$

Die Funktionen ergeben sich aus der Matrix \underline{M} zu:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s) \sin \mu & \beta(s) \sin \mu \\ -\gamma(s) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s) \sin \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & S_1 \\ C_1' & S_1' \end{pmatrix}$$

Aus dem Nenner wird dann

$$(1 - C_1)(1 - S_1') - C_1' S_1 = 1 + (C_1 S_1' - C_1' S_1) - (C_1 + S_1') = 2 - 2 \cos \mu = 4 \sin^2 \frac{\mu}{2}$$

Für den Zähler benötigt man den folgenden Zusammenhang, für die Dispersionsfunktion, den wir hier nicht ableiten wollen (man siehe in der Literatur, z.B. Hinterberger nach):

$$d(s) = S(s) \int_0^s h(\bar{s}) C(\bar{s}) d\bar{s} - C(s) \int_0^s h(\bar{s}) S(\bar{s}) d\bar{s}$$

Setzt man dies in den Zähler von ein so ergibt sich:

$$\begin{aligned} S_1 d_1' + (1 - S_1') d_1 &= S_1 [S_1' \oint h C d\bar{s} - C_1' \oint h S d\bar{s}] - (S_1' - 1) [S_1 \oint h C d\bar{s} - C_1 \oint h S d\bar{s}] = \\ &S_1 \oint h C d\bar{s} + (1 - C_1) \oint h S d\bar{s} \end{aligned}$$

mit $S_1 = \beta_0 \sin \mu$; $C_1 = \cos \mu + \alpha_0 \sin \mu$ sowie

$$C(\bar{s}) = \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \Delta\Psi + \alpha_0 \sin \Delta\Psi) \quad ; \quad S(\bar{s}) = \sqrt{\beta \cdot \beta_0} \sin \Delta\Psi \quad \text{folgt}$$

$$S_1 \oint h C d\bar{s} + (1 - C_1) \oint h S d\bar{s} =$$

$$\beta_0 \sin \mu \cdot \oint h \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \Delta\Psi + \alpha_0 \sin \Delta\Psi) d\bar{s} + (1 - \cos \mu + \alpha_0 \sin \mu) \oint h \sqrt{\beta \cdot \beta_0} \sin \Delta\Psi d\bar{s} =$$

$$2\sqrt{\beta_0} \cdot \sin \frac{\mu}{2} \cdot \oint h \sqrt{\beta} \cos(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2}) d\bar{s}$$

Damit können wir endgültig hinschreiben

$$D_0 = \frac{2\sqrt{\beta_0} \cdot \sin \frac{\mu}{2} \cdot \oint h \sqrt{\beta} \cos(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2}) d\bar{s}}{4 \sin^2 \frac{\mu}{2}} = \frac{\sqrt{\beta_0}}{2 \sin \frac{\mu}{2}} \cdot \oint h \sqrt{\beta} \cos(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2}) d\bar{s}$$

oder allgemein an einer Stelle s

$$D(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \frac{\mu}{2}} \cdot \int_s^{s+C} h(\bar{s}) \sqrt{\beta(\bar{s})} \cos\left(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2}\right) d\bar{s}$$

Man erkennt, dass $D(s)$ immer größer wird, je näher $\sin \frac{\mu}{2}$ der Null kommt und wird schließlich unendlich groß. Wenn also $\sin \frac{\mu}{2} = 0 \Rightarrow \mu = 2\pi \cdot N$ und damit ist Q ganzzahlig, denn

$$Q = \frac{\mu}{2\pi} = N = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds}{\beta(s)}.$$