

5.) Transversale Strahldynamik – AG Fokussierung

Zum besseren Verständnis der Ionenoptik ist es sehr hilfreich, auf die Methoden und Konzepte der geometrischen Lichtoptik zurückzugreifen. Wir stellen daher den Zusammenhang zwischen der Ionenoptik in Matrixdarstellung und der geometrischen Optik her. Wir beginnen mit dem Konzept „dünne Linse“. Für die lineare Strahloptik gilt

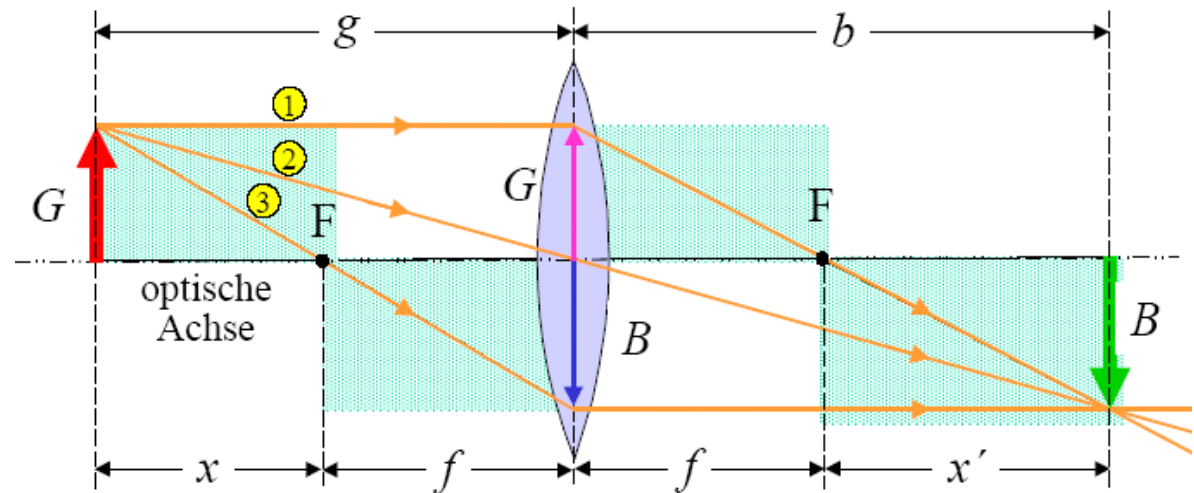
$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{z_0}$$

$$\rightarrow \vec{x}(z) = \underline{A}(z) \cdot \vec{x}(z_0)$$

Die Transfermatrix A vom Gegenstand zum Bild lautet:

$$\rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{g} & 0 \\ -\frac{1}{f} & -\frac{g}{b} \end{pmatrix}$$

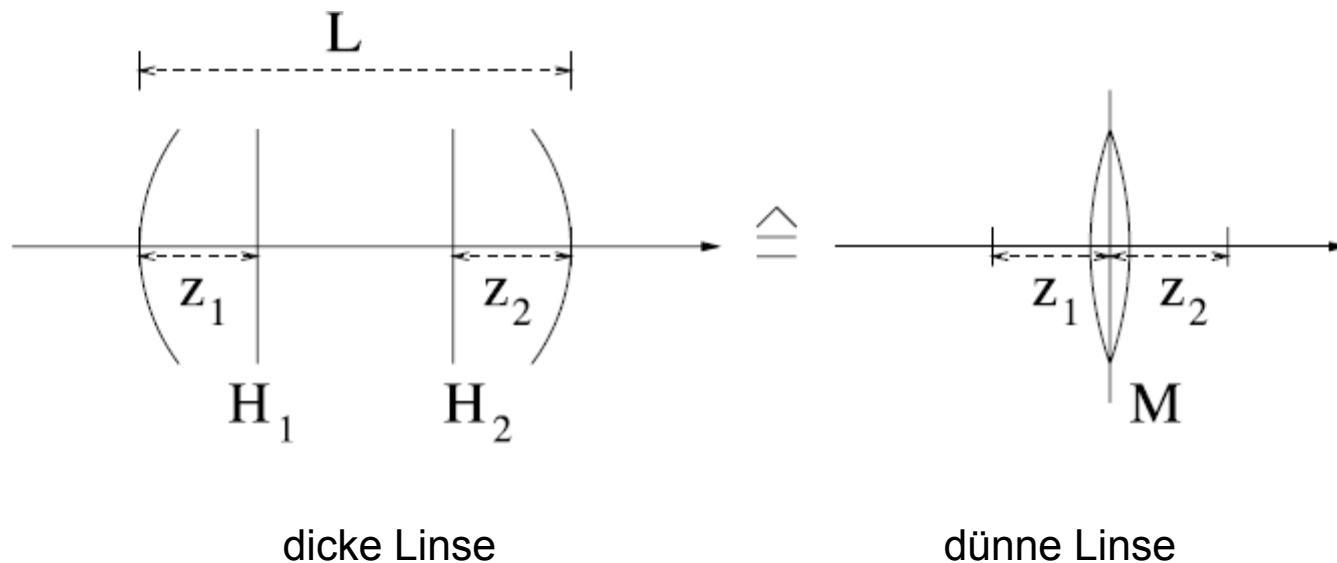
Die Forderung einer Punkt-zu-Punkt Abbildung erfordert $A_{12}=0$ (x ist unabhängig von x'_0).
Die Brechkraft der Linse ist $A_{21}=-1/f$ (Winkel x' ist abhängig vom Auftreffort an der Linse x_0).



Das Matrixelement A11 ist der **Abbildungsmaßstab** M für die Ortsabbildung.

$$M = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} = R_{11} \quad \text{und} \quad R_{22} = \frac{1}{M}$$

Man kann nun jedes fokussierende und defokussierende Element durch eine dünne Linse repräsentieren:



$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus kann man die Elemente z_1 , z_2 und f ausrechnen.

Beim Entwurf von ionenoptischen Systemen kann man die beiden Hauptebenen H_1 und H_2 einer Linse in der Mittelebene M zusammenfallen lassen und mit den Gleichungen der dünnen Linse rechnen. Man muss dann nur darauf achten, dass das System in Wirklichkeit um die Strecke $L - (z_1 + z_2)$ länger ist!

Zur Erinnerung: Die Transformation einer Phasenraumellipse ergibt sich zu

$$\underline{\sigma_x(s)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \underline{A_x(s)} \circ \underline{\sigma_x(0)} \circ \underline{A_x^T(s)}$$

Die Phasenellipse wird durch eine symmetrische 2x2 Matrix die Sigma-Matrix repräsentiert. Die Phasenraumellipse ergibt sich aus

$$X^T \underline{\sigma}_x^{-1} X = 1 \quad \text{mit} \quad X^T = (x, x') \quad X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

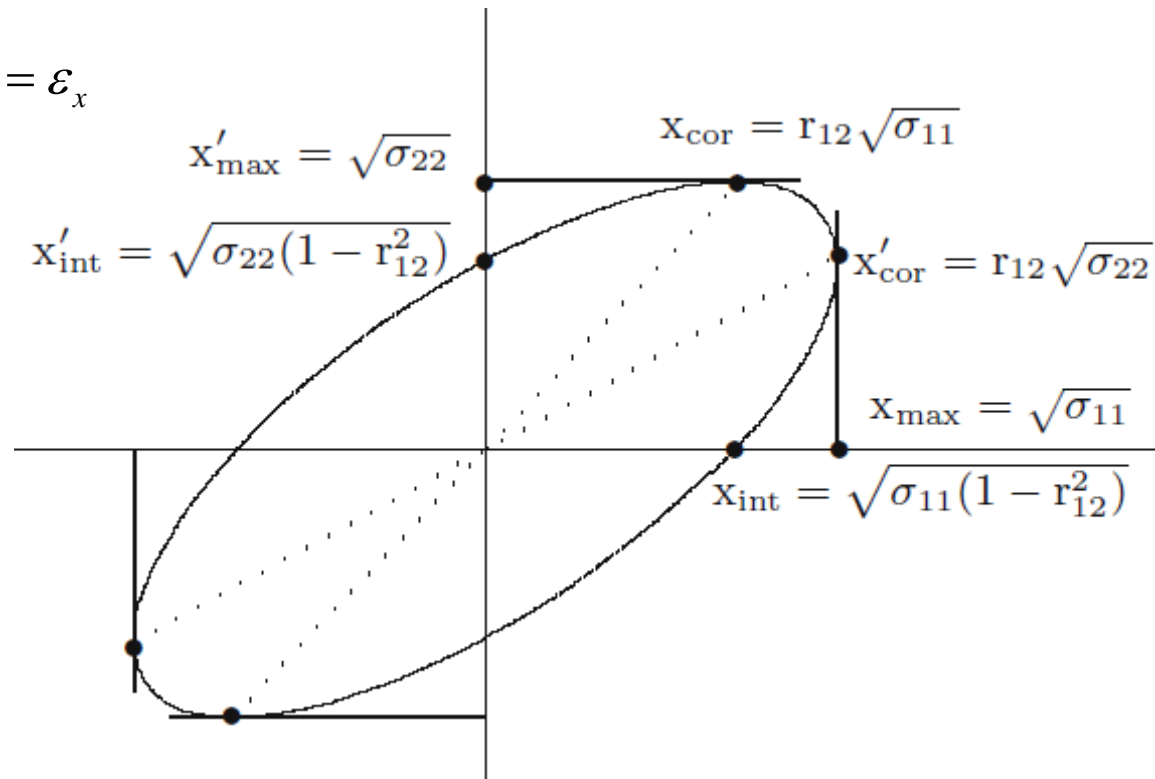
$$\underline{\sigma}_x^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{\sigma}_x)} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(\underline{\sigma}_x) = \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}$$

Damit erhält man

$$\sigma_{22}x^2 + 2\sigma_{12}xx' + \sigma_{11}x'^2 = \det(\underline{\sigma}_x) = \varepsilon_x$$

Dabei ist ε_x die Emittanz der Phasenraumverteilung. Später stellen wir den Zusammenhang mit den TWISS Parametern der Maschine her, der aus dem Vergleich mit Kapitel 3 klar wird. Die Korrelation r_{12} erhält man aus

$$r_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$$



Eine aufrechte Ellipse wird als **Strahltaile** (beam waist) bezeichnet.

5.1 Strahltaile einer Punk-zu-Punkt Abbildung

Die Betrachtung einer Punkt-zu-Punkt-Abbildung verleitet zu der Annahme, ein Strahl mit einer Taille am Gegenstandspunkt habe am Bildpunkt ebenfalls eine Taille. Nur bei einer teleskopischen Abbildung kann man gleichzeitig eine Punkt-zu-Punkt und Taille-zu-Taille-Abbildung erreichen. Die Transfermatrix von der Gegenstandsebene zur Bildebene lautet

$$R_x(s) = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \quad \text{Transfermatrix von Gegenstandsebene zur Bildebene des Systems}$$

$$\text{Strahltaile } (\sigma_{12}=0) \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma}_x = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\sigma}_x(s) = \underline{R}_x(s) \circ \underline{\sigma}_x(0) \circ \underline{R}_x^T(s) = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} R_{11}^2 & \sigma_{11} R_{11} R_{21} \\ \sigma_{11} R_{21} R_{11} & \sigma_{11} R_{21}^2 + \sigma_{22} R_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Wir wissen, dass die waist nach einer Drift von

$$L = -\frac{\sigma_{12}(s)}{\sigma_{22}(s)} = -\frac{\sigma_{11} R_{11} R_{21}}{\sigma_{11} R_{21}^2 + \sigma_{22} R_{22}^2}$$

Das Vorzeichen von L gibt die Lage der waist in Bezug auf den Bildpunkt an. Ein negativer Wert bedeutet, dass die waist vor dem Bildpunkt liegt. Die Strahlausdehnung am Bildpunkt beträgt

$$x_{\max}(s+L) = \sigma_{11} R_{11}^2 \quad \text{und an der Stelle der waist} \quad x_{\max}(s+L) = \frac{\sigma_{22} R_{22}^2}{\sigma_{11} R_{21}^2 + \sigma_{22} R_{22}^2} x_{\max}$$

Am Bildpunkt liegt eine Strahltaile vor, wenn $R_{21}=0$ ist. Diese Bedingung bedeutet jedoch auch eine Parallel-zu-Parallel Abbildung (der Winkel hängt nicht vom Startort ab). Man spricht dann von einer **teleskopischen Abbildung**. Nur bei einer teleskopischen Punkt-zu-Punkt-Abbildung hat ein Strahl mit einer Taile am Gegenstandspunkt auch eine Taile am Bildpunkt!

5.2 Ionenoptische Systeme

Unter einem ionenoptischen System verstehen wir eine Anordnung ionenoptischer Elemente. Die Elemente der Magneto-optik sind Driftstrecken, Ablenkmagnete und Quadrupolmagnete.

Ein einzelner Quadrupolmagnet wirkt in einer Ebene fokussierend und in der dazu senkrechten Ebene defokussierend. Für die Transfermatrizen hatten wir:

$k < 0$: fokussierend in x , defokussierend in y

$$M_{k < 0} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{|k|}L) & 1/\sqrt{k} \sin(\sqrt{|k|}L) & 0 & 0 \\ -\sqrt{|k|} \sin(\sqrt{|k|}L) & \cos(\sqrt{|k|}L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\sqrt{|k|}L) & 1/\sqrt{k} \sinh(\sqrt{|k|}L) \\ 0 & 0 & \sqrt{|k|} \sinh(\sqrt{|k|}L) & \cosh(\sqrt{|k|}L) \end{pmatrix}$$

Bei einem in x fokussierenden und y defokussierenden Quadrupol erhält man für die Brennweiten

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}L)} \quad , \quad f_y = -\frac{1}{\sqrt{k} \sinh(\sqrt{k}L)} \quad \text{wobei } L = \text{Länge des Quadrupols und } k = \frac{g}{B\rho}$$

g = Feldgradient des Quadrupols, $B\rho$ = magnetische Steifigkeit des Strahls

Bei einem in x defokussierenden Quadrupol sind die Gleichungen für x und y zu vertauschen.

$$\text{Wenn } \sqrt{k}L \ll 1 \Rightarrow \sin(\sqrt{k}L) \approx \sqrt{k}L \quad \text{und} \quad \sinh(\sqrt{k}L) \approx \sqrt{k}L \Rightarrow f_x = \frac{1}{kL} = -f_y$$

Für die Lagen der Hauptebenen erhalten wir:

$$z_{1x} = \frac{M_{22}-1}{M_{21}} = -\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\cos(\sqrt{k}L)-1}{\sin(\sqrt{k}L)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right)}{\sqrt{k} \sin\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \tan\left(\frac{\sqrt{k}L}{2}\right) \approx \frac{L}{2} = z_{2x}$$

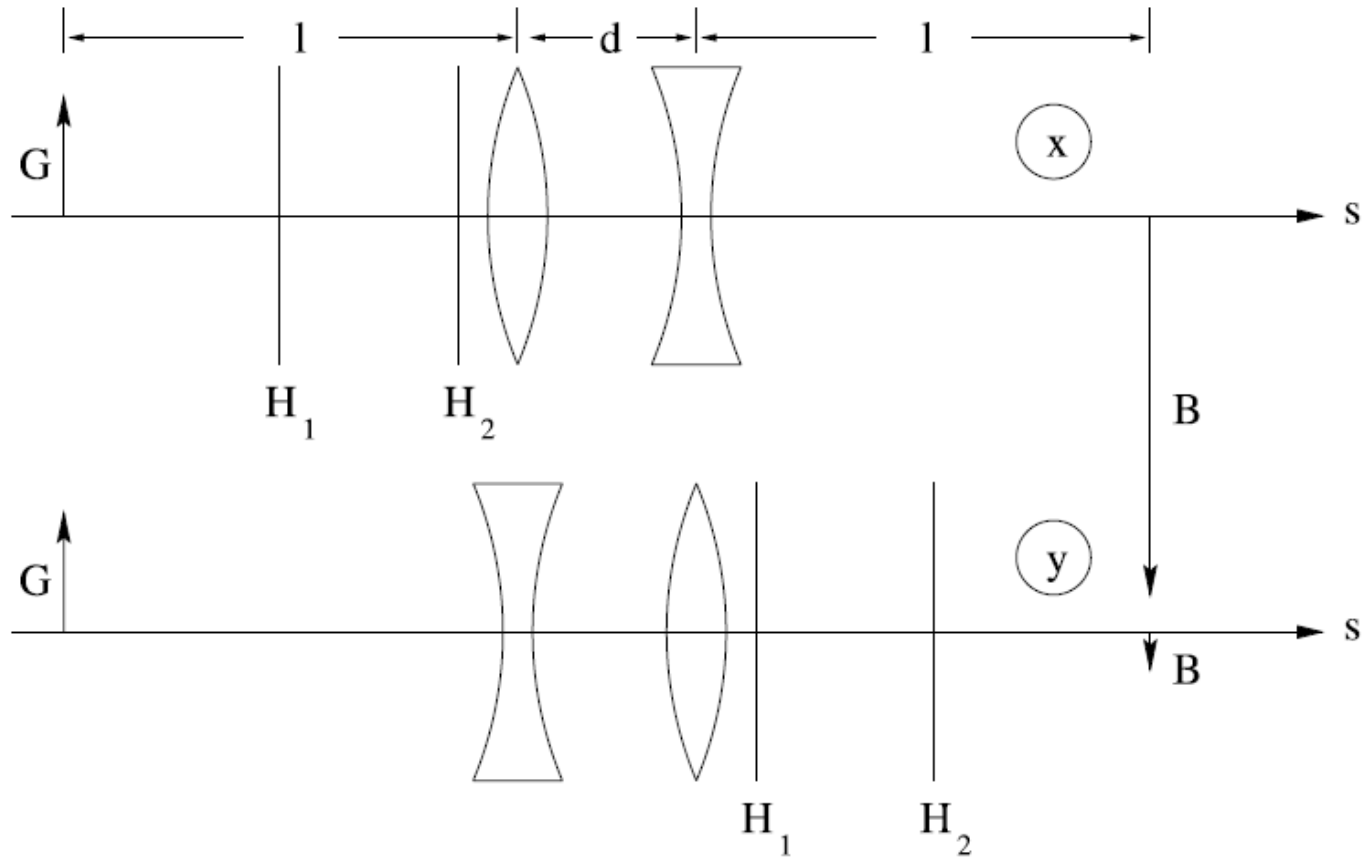
Ebenso erhält man $z_{1y} = z_{2y} \approx \frac{L}{2}$

D. h., ein einzelner Quadrupol wirkt näherungsweise wie eine dünne Sammel- bzw. Zerstreuungslinse, deren Mittelebene in der Mitte des Quadrupols liegt! Die Verwendung eines einzelnen Quadrupols für eine Punkt-zu-Punkt oder auch Punkt-zu-Parallel-Abbildung macht wenig Sinn, da die fokussierende Wirkung in einer transversalen Richtung stets eine entsprechend starke Defokussierung in der dazu senkrechten Richtung bedeutet.

Das Quadrupoldublett

Das einfachste doppelfokussierende System besteht aus zwei entgegengesetzt gepolten Quadrupolmagneten. Ein solches System wird allgemein Quadrupoldublett genannt.

$$\underline{R}_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_1} + \frac{d}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix}$$



Spezialfall $f_1 = +f, f_2 = -f$.

$$\underline{R_D} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{d}{f^2} & 1 + \frac{d}{f} \end{pmatrix}, \text{ d.h. die Brennweite der Dublette ist } f_D = \frac{f^2}{d}$$

Mit den Driften erhält man:

$$\underline{R}_D = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{d}{f^2} & 1 + \frac{d}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} - \frac{ld}{f^2} & 2l + d - d\left(\frac{l}{f}\right)^2 \\ -\frac{d}{f^2} & 1 + \frac{d}{f} - \frac{ld}{f^2} \end{pmatrix}$$

Punkt-zu-Punkt Abbildung: $R_{12} = 0$

$$2l + d - d\left(\frac{l}{f}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{f^2} = \frac{2}{ld} + \frac{1}{l^2} \Rightarrow f = \pm l \sqrt{\frac{d}{2l + d}}$$

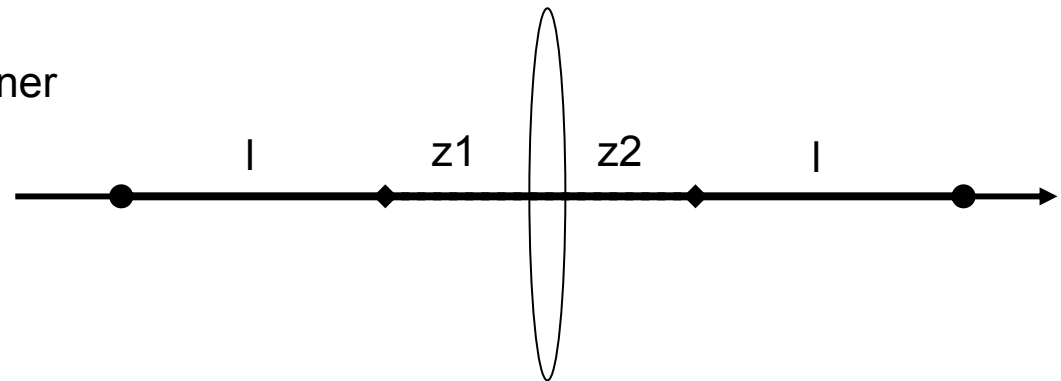
Für die Lage der Hauptebenen des Dubletts erhält man:

$$z_{1x} = \frac{R_{22} - 1}{R_{21}} = -\frac{1 + \frac{d}{f} - 1}{-\frac{d}{f^2}} = -f \quad z_{2x} = \frac{R_{11} - 1}{R_{21}} = -\frac{1 - \frac{d}{f} - 1}{-\frac{d}{f^2}} = f$$

Damit ergibt sich für die Transfermatrix mit einer dünnen Linse als Ersatz der Dublette:

$$g = l + z_1 = l - f$$

$$b = l + z_2 = l + f$$



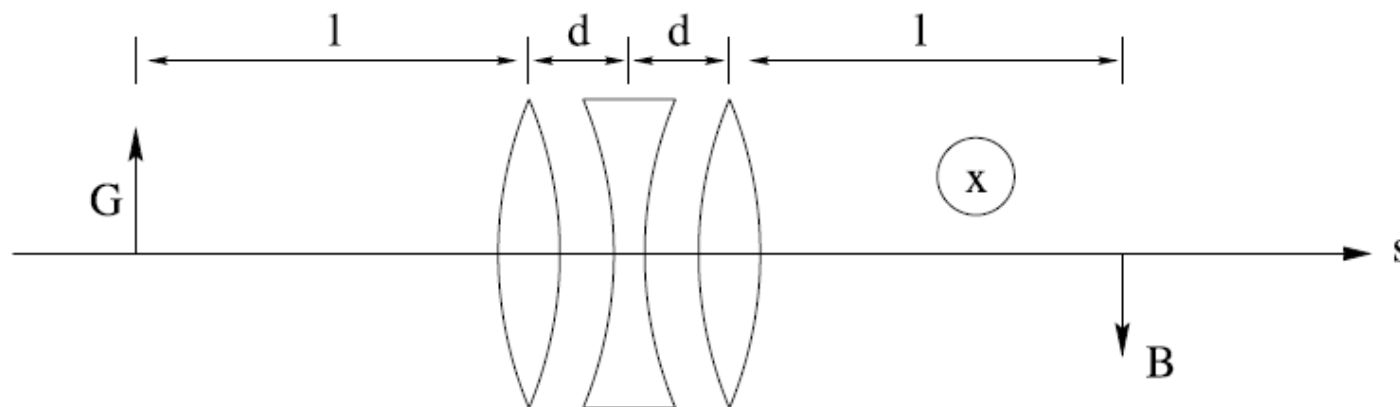
$$\underline{R}_D = \begin{pmatrix} -\frac{b}{g} & 0 \\ -\frac{d}{f^2} & -\frac{g}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{l+f}{l-f} & 0 \\ -\frac{d}{f^2} & -\frac{l-f}{l+f} \end{pmatrix}$$

Das Vorzeichen von f hängt von der Polarität der beiden Quadrupole ab. Wenn der erste Quadrupol wie eine Sammellinse und der zweite Quadrupol wie eine Zerstreuungslinse wirkt, ist das Vorzeichen von f positiv etc. Je nach dem Vorzeichen von f ist der Abbildungsmaßstab $|M| = b/g$ größer oder kleiner als Eins.

$$f_{1x} = +|f|, \quad f_{2x} = -|f|, \quad |M_x| > 1$$

$$f_{1y} = -|f|, \quad f_{2y} = +|f|, \quad |M_y| < 1$$

Das Quadrupoltripllett



Das Quadrupoltripllett besteht aus drei Quadrupolmagneten. Dabei ist die Polarität des mittleren Quadrupols entgegengesetzt zur Polarität der beiden äußeren Quadrupole. Bei einem symmetrischen Triplet ist die effektive Länge oder der Feldgradient des mittleren Quadrupols im Vergleich zu den beiden äußeren doppelt so groß. Die Transfermatrizen für das Triplet lauten:

$$\underline{R}_{Tx} = \begin{pmatrix} 1 - 2\frac{d^2}{f^2} & 2d(1 + \frac{d}{f}) \\ -\frac{2d}{f^2}(1 - \frac{d}{f}) & 1 - \frac{2d^2}{f^2} \end{pmatrix} \quad \underline{R}_{Ty} = \begin{pmatrix} 1 - 2\frac{d^2}{f^2} & 2d(1 - \frac{d}{f}) \\ -\frac{2d}{f^2}(1 + \frac{d}{f}) & 1 - \frac{2d^2}{f^2} \end{pmatrix}$$

Das stellt eine dicke Sammellinse dar und in der Näherung $d \ll f$ gilt $\frac{1}{f_T} = \frac{2d}{f^2}$

Das symmetrische Triplet wirkt wie eine Kombination von zwei entgegengesetzt gepolten Dubletts.

$$z_{1x} = \frac{R_{22} - 1}{R_{21}} = -\frac{1 - \frac{2d^2}{f^2} - 1}{-\frac{2d}{f^2}(1 - \frac{d}{f})} = \frac{d}{1 - \frac{d}{f}}, \quad z_{2x} = \frac{R_{11} - 1}{R_{21}} = -\frac{1 - \frac{2d^2}{f^2} - 1}{-\frac{2d}{f^2}(1 - \frac{d}{f})} = \frac{d}{1 - \frac{d}{f}} \Rightarrow b = g \approx l + d$$

und damit ist $M = 1$. Das symmetrische Triplet wird vor allem für die Punkt-zu-Punkt-Abbildungen mit gleichem Abbildungsmaßstab in der x- und y-Richtung verwendet. Bei symmetrischer Anordnung zwischen Gegenstandsebene und Bildebene ist die Gegenstandsweite g gleich der Bildweite b . Die Transfermatrizen für das gesamte System lauten dann:

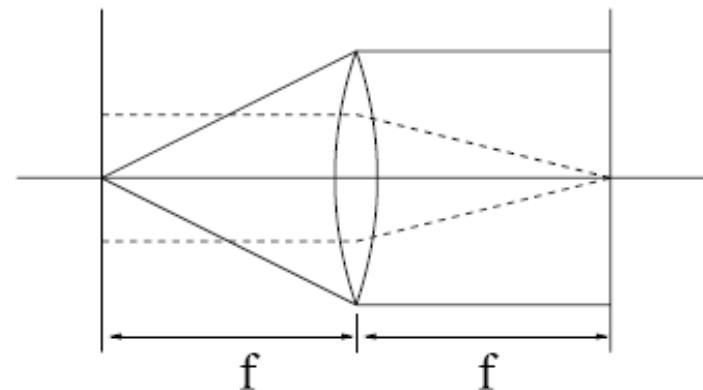
$$\underline{R_{Tlx,y}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{f_{x,y}} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{f_{x,y}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{l+d} \Rightarrow f_{x,y} = \frac{l+d}{2}$$

Bei dem symmetrischen Triplett liegen die beiden Hauptebenen sehr nahe beim Zentrum des mittleren Quadrupols. In erster Näherung wirkt das symmetrische Triplett wie eine dünne Linse, deren Mittelebene im Zentrum des Triplets liegt.

5.2 Teleskopische Abbildung

Eine teleskopische Abbildung zeichnet sich dadurch aus, dass neben der Bedingung für eine Punkt-zu-Punkt-Abbildung ($R_{12} = 0$) auch die Bedingung für eine Parallel-zu-Parallel-Abbildung ($R_{21} = 0$) erfüllt ist.

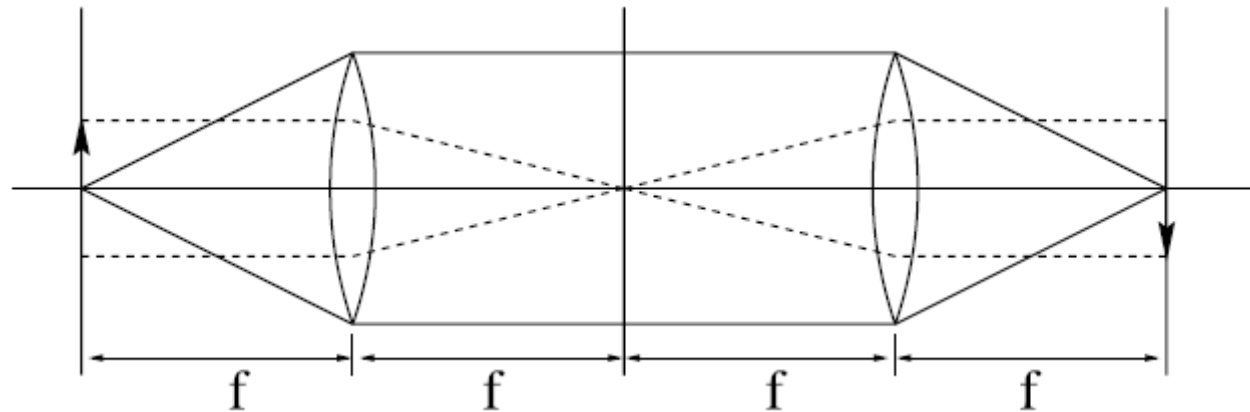
$$\underline{R_{Tele}} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$$



Betrachten wir das System einer dünnen Linse von Brennpunkt zu Brennpunkt, so erhalten wir

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}$$

Dieses System erfüllt die Punkt-zu-Parallel Abbildung ($R_{22}=0$) und Parallel-zu-Punkt Abbildung ($R_{11}=0$). Kombiniert man zwei dieser Systeme



$$\underline{R}_{Tele} = \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -\frac{1}{f_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ -\frac{1}{f_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{f_1} & 0 \\ 0 & -\frac{f_1}{f_2} \end{pmatrix} \text{ und somit } M = -f_2/f_1$$

Für $f_1 = f_2 = f$ gilt

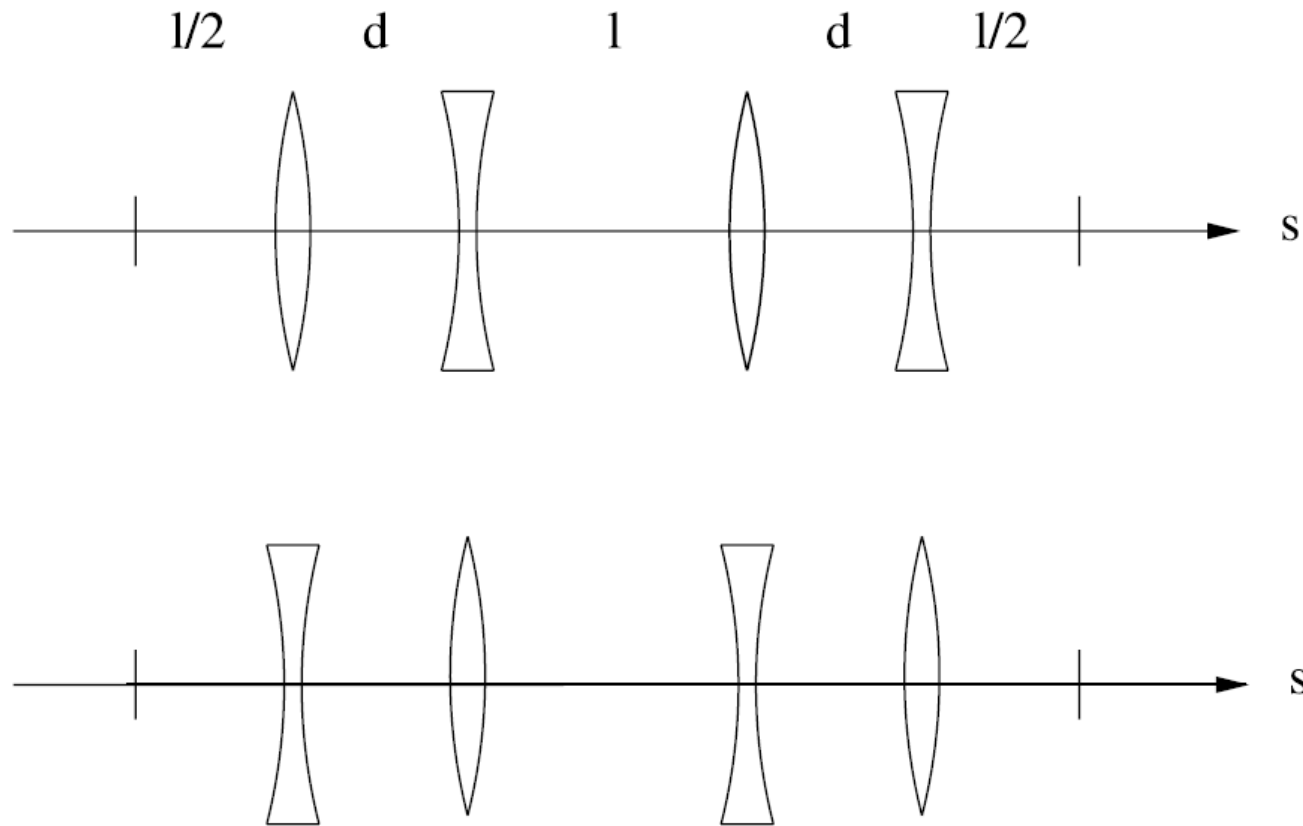
$$\underline{R_{Tele}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (negative Einheitsmatrix) Diese Transformation nennt man } (-\mathbb{I})\text{-Teleskop.}$$

Die Kombination von Systemen mit teleskopischer Abbildung ergibt wiederum ein System mit teleskopischer Abbildung. Wenn man z. B. zwei $(-\mathbb{I})$ -Teleskope kombiniert, erhält man ein $(+\mathbb{I})$ -Teleskop. Eine andere Eigenschaft der teleskopischen Abbildung ist die Möglichkeit, den Start- und Endpunkt eines teleskopischen Systems in gewissen Grenzen verschieben zu können.

$$\underline{R_{Tele}} = \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -L \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Addition und Subtraktion von Driftstrecken ist nur möglich, solange Start- und Endpunkt des resultierenden Systems noch außerhalb der magnetischen Elemente liegen. Eine teleskopische Abbildung in beiden Ebenen nennt man doppelteleskopisch. Die Kombination von zwei symmetrischen Quadrupoltriplettlinen ist eine der Möglichkeiten, um eine doppelteleskopische Abbildung zu realisieren.

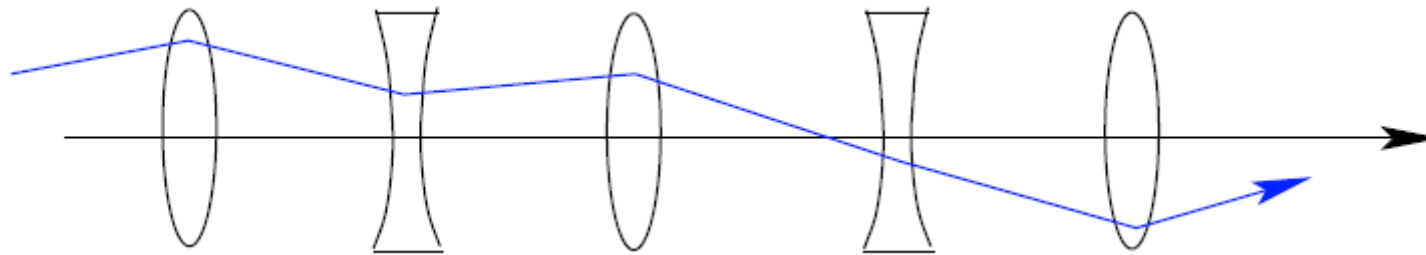
Eine doppelteleskopische Abbildung kann aber auch mit vier Quadrupolmagneten erreicht werden. Man kann hier mit den Gleichungen der Dublette arbeiten und diese kombinieren.



Die Bedingungen für die Teleskopie in x- und y-Richtung lauten $2f_x = 2f_y = 1$, wobei f_x und f_y die Brennweiten eines Dubletts darstellen. Die Brennweite für die Quadrupole ergibt sich dann zu

$|f| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{l d}$ mit $d = 1$ erhält man die maximale Brennweite für den einzelnen Quadrupol und damit die geringste Erregung, was am ökonomischsten ist. Es gibt auch doppelteleskopische Abbildungen mit 6 Quadrupolen. Bei diese kann man (-I) und (+I) Teleskopie einstellen.

Man kann erkennen, dass man mit dieser alternierenden Anordnung von Quadrupolen gleicher Brennweite eine Fokussierung erreichen kann. Daher spricht man hier auch von einer **alternierenden Gradienten-Fokussierung (AG-Fokussierung)**.



Die starke Fokussierung basiert auf dem Prinzip des alternierenden Gradienten, daher wird das stark fokussierende Synchrotron auch AG-Synchrotron ("alternating gradient synchrotron") genannt. Das Prinzip der starken Fokussierung bewirkte eine Revolution in dem Bau von Synchrotronbeschleunigern. Eine Erhöhung der Fokussierungsstärke bewirkt eine entsprechende Abnahme der transversalen Strahlausdehnung, d.h. der Strahlenveloppen.