# 9. Longitudinale Strahdynamik mit Raumladung

Vorlesungsfolien 29.06.2012

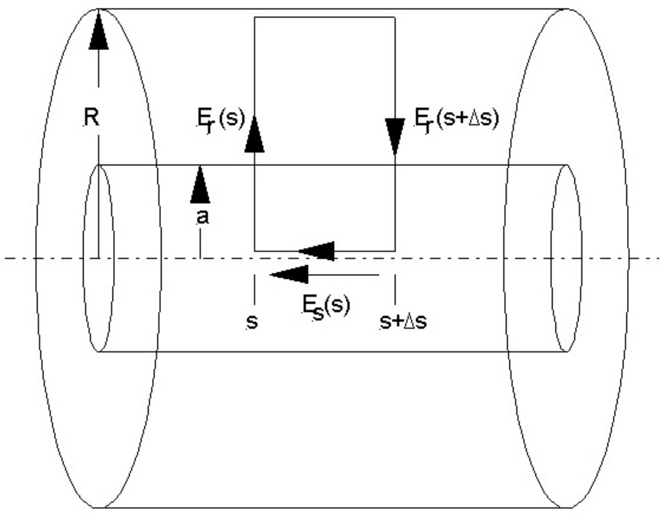
## Inhalt Teil 1



GSI RF-Group, P. Hülsmann, Email: P.Huelsmann@gsi.de, Phone: +49 6159 71 2066

# 9. Longitudinale Strahdynamik mit Raumladung

## 9.1 Longitudinale Feldstärke im Strahl durch den longitudinal variierenden Strom




Das Strahlrohr hat den Radius R und die Wand sei unendlich gut leitend. Mittig im Rohr bewegt sich der Ionenstrahl mit der Geschwindigkeit v in s-Richtung. Der Ionenstrahl hat den Radius a und weist eine homogene Dicht r auf, die radial nicht variieren soll. Longitudinal darf die Dichte sehr wohl variieren. Im Ionenstrahl variiert natürlich dann der Strahlstrom mit dem Radius r gemäß der Formeln:

$$I(r,s) = \rho(s) v \pi r^2 = I(s)\frac{r^2}{a^2} \quad \text{für} \quad r \le a$$

$$I(s) = \rho(s) v \pi a^2 \quad \text{für} \quad r > a$$

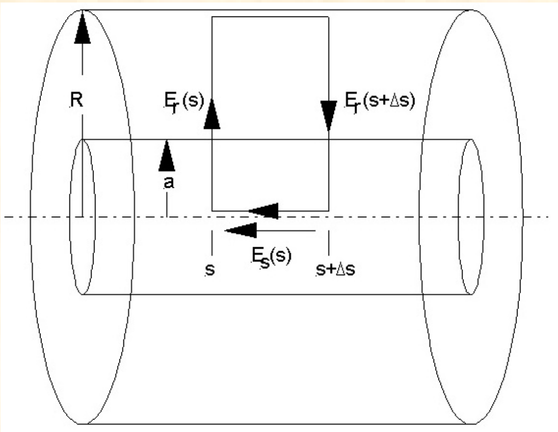
Nun kann man die radialen elektrischen Felder bzw. die azimutalen H-Felder im Strahl und außerhalb des Strahls recht einfach ausrechnen. Zur Berechnung der E-Felder wird die vierte Maxwellsche Gleichung benutzt, zur Berechnung der H-Felder die Erste:

$$E_r(s) = \frac{I(s)\,r}{2\pi\varepsilon_0 v a^2} \quad \text{für} \quad r \le a \qquad\qquad H_\varphi(s) = \frac{I(s)\,r}{2\pi a^2} \quad \text{für} \quad r \le a$$

$$E_r(s) = \frac{I(s)}{2\pi\varepsilon_0 v r} \quad \text{für} \quad r > a \qquad\qquad H_\varphi(s) = \frac{I(s)}{2\pi r} \quad \text{für} \quad r > a$$

# 9. Longitudinale Strahdynamik mit Raumladung

## 9.1 Longitudinale Feldstärke im Strahl durch den longitudinal variierenden Strom




Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist das Induktionsgestetz mit dem Umlaufintegral wie im Bild links gezeigt:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot\vec{n}da$$

Wir werten zunächst die linke Seite aus und beachten, daß wenn die Strahlrohrwand unendlich gut leitend ist, das Linienintegral dort Null ist. Es ergibt sich dann der etwas längliche Ausdruck:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -E_s(s)\Delta s + \frac{I(s)}{4\pi\varepsilon_0 v} + \frac{I(s)}{2\pi\varepsilon_0 v}\ln(\frac{R}{a}) - \frac{I(s+\Delta s)}{4\pi\varepsilon_0 v} - \frac{I(s+\Delta s)}{2\pi\varepsilon_0 v}\ln(\frac{R}{a}) = -E_s(s)\Delta s - \frac{I'(s)\Delta s}{4\pi\varepsilon_0 v} - \frac{I'(s)\Delta s}{2\pi\varepsilon_0 v}\ln(\frac{R}{a})$$

Die rechte Seite ist einfacher auszuwerten:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot\vec{n}da = -\mu_0 v\frac{I'(s)\Delta s}{4\pi} - \mu_0 v\frac{I'(s)\Delta s}{2\pi}\ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

Im Endeffekt ergibt sich, Gott sei Dank, ein übersichtlicher Ausdruck:

$$-E_s(s) = (1-\varepsilon_0\mu_0 v^2)\frac{I'(s)}{4\pi\varepsilon_0 v} + (1-\varepsilon_0\mu_0 v^2)\frac{I'(s)}{2\pi\varepsilon_0 v}\ln\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{\left(1+2\ln\left(\frac{R}{a}\right)\right)I'(s)}{4\pi\varepsilon_0 v\gamma^2} = \frac{g\,I'(s)}{4\pi\varepsilon_0 v\gamma^2}$$

Vorzeichen ist richtig, denn wenn $I(s)$ zunimmt, muß $E_s(s)$ entgegengesetzt gerichtet sein.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Feldstärke im Strahl gegeben ist durch:

$$E_s(s) = -\frac{g\,I'(s)}{4\pi\varepsilon_0 v\gamma^2} = -\frac{g}{4\pi\varepsilon_0\gamma^2}\frac{d\lambda(s)}{ds}$$

Dabei ist $\lambda$ die Linienladungsdichte und g der charakteristische g-Faktor der nur als Mittelwert angegeben werden kann. Im SIS18 hat man etwa:

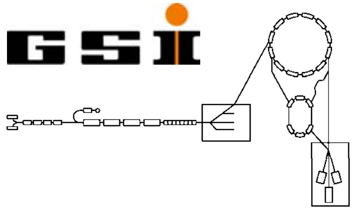
$$g = 1 + 2\ln\left(\frac{R}{a}\right) \approx 1{,}89$$

Die vom Strahl durch die Raumladung erfahrene Spannung pro Umlauf ist einfach die Feldstärke mal dem Ringumfang:

$$V_{Rl}(s) = \frac{g\,R}{2\varepsilon_0\gamma^2}\frac{d\lambda(s)}{ds}$$

Die einzige Schwierigkeit die wir noch haben ist die Variablentransformation von s zur HF-Phase $\phi$, damit wir das Ganze in die Hamilton-Funktion einbauen können. Dabei helfen die Formeln:

$$d\phi = -\frac{h}{R}ds\,, \quad \lambda(s) = -\frac{h}{R}\lambda(\phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\lambda}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{h^2}{R^2}\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} \quad \Rightarrow \quad V_{Rl}(\phi) = \frac{g\,h^2}{2\varepsilon_0 R\gamma^2}\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi}$$




# 9. Longitudinale Strahdynamik mit Raumladung

## 9.3 Berücksichtigung der Raumladung nach dem Hofmann-Pedersen-Modell

Wir werden nun die Raumladung in unsere alte Hamilton-Funktion einbauen:

$$H(w,\phi) = -\frac{1}{2}\frac{h\omega_r^2\eta}{\beta^2 E}w^2 + \frac{Ze\hat{V}}{2\pi}\left\{\cos(\phi) - \cos(\phi_s) + (\phi - \phi_s)\sin(\phi_s)\right\}$$

Die Potential-Funktion in der Hamilton-Funktion kann man durch folgendes Integral über die Spannung am Beschleunigungsspalt darstellen:

$$U_{HF}(\phi) = \int_{\phi}^{\phi_s} \hat{V}\left(\sin(\phi) - \sin(\phi_s)\right)d\phi = \hat{V}\left\{\cos(\phi) - \cos(\phi_s) + (\phi - \phi_s)\sin(\phi_s)\right\}$$

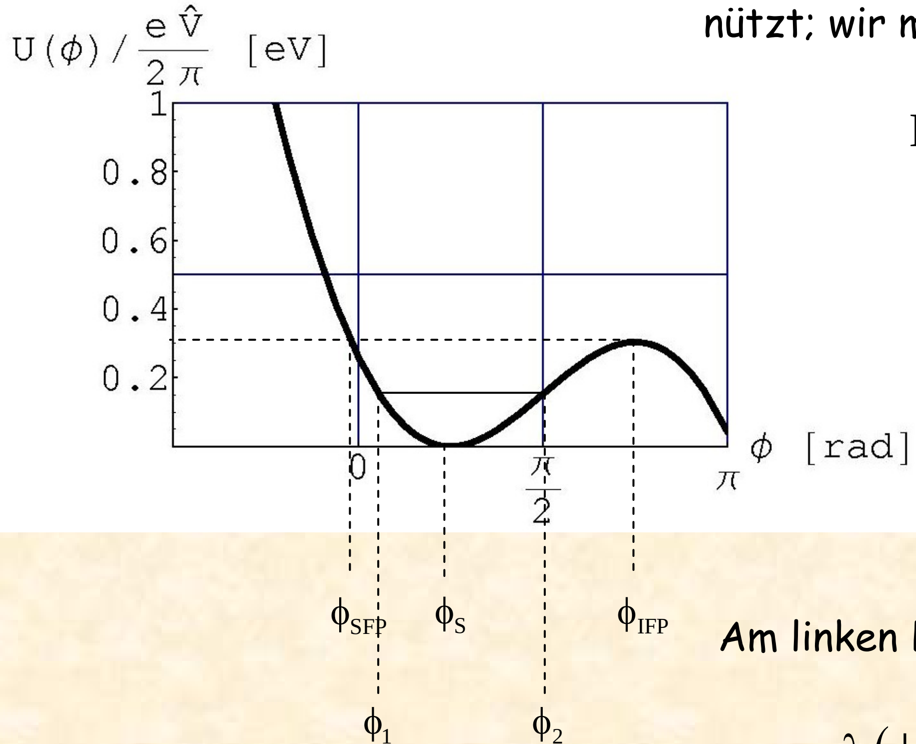
Die durch die Raumladung pro Umlauf erfahrene Spannung kann man natürlich genauso in eine Potential-Funktion umrechnen. Gemäß obiger Darstellung gilt dann nach Integration:

$$V_{Rl}(\phi) = \frac{g\,h^2}{2\varepsilon_0 R\gamma^2}\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} \qquad U_{Rl}(\phi) = \frac{gh^2}{2\varepsilon_0 R\gamma^2}\left(\lambda(\phi_s) - \lambda(\phi)\right)$$

Das kann man jetzt in die Hamiltonfunktion einfügen, man weiß aber noch nichts über die Linienladungsdichte $\lambda$. Die neue Hamilton-Funktion lautet also:

$$H(w,\phi) = -\frac{1}{2}aw^2 + \frac{1}{2}b\left\{U_{HF}(\phi) + \xi(\lambda(\phi_s) - \lambda(\phi))\right\} \qquad b = \frac{Ze}{\pi}, \quad \xi = \frac{h^2 g}{2\varepsilon_0 R\gamma^2}$$

# 9. Longitudinale Strahdynamik mit Raumladung
## 9.3 Berücksichtigung der Raumladung nach dem Hofmann-Pedersen-Modell




Also wir haben jetzt eine Hamilton-Funktion die uns nichts nützt; wir müssen erst einen vernünftigen Ansatz machen

$$H(w,\phi) = -\frac{1}{2}aw^2 + \frac{1}{2}b\left\{U_{HF}(\phi) + \xi(\lambda(\phi_s) - \lambda(\phi))\right\}$$

Ein vernünftiger Ansatz ist folgender:

$$\lambda(\phi) = Aw^2$$

Das kann man in die Hamilton-Funktion einsetzten:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{a}{A}\lambda(\phi) + \frac{1}{2}b\left\{U_{HF}(\phi) + \xi(\lambda(\phi_s) - \lambda(\phi))\right\}$$

Am linken Bunchrand verschwindet die Linienladungsdichte:

$$\lambda(\phi_1) = \lambda(\phi_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{2}b\left\{U_{HF}(\phi_1) + \xi\lambda(\phi_s)\right\}$$

Als Ergebnis hat man einen Ausdruck für die Linienladungsdichte mit unbekannter Konstante A:

$$\lambda(\phi) = A\frac{b}{a}\left\{U_{HF}(\phi) - U_{HF}(\phi_1)\right\} - A\frac{b}{a}\xi\lambda(\phi)$$

Diesen Ausdruck kann man nach $\lambda(\phi)$ umstellen $\quad \lambda(\phi) = A\frac{b}{a}\{U_{HF}(\phi) - U_{HF}(\phi_1)\} - A\frac{b}{a}\xi\lambda(\phi)$

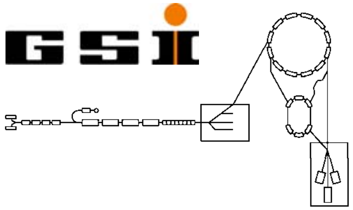
$$\lambda(\phi) = \frac{A\frac{b}{a}\{U_{HF}(\phi) - U_{HF}(\phi_1)\}}{\left(A\frac{b}{a}\xi + 1\right)}$$

Das Integral über die Linienladungsdichte vom linken bis zum rechten Bunchrand muß die Gesamtladung ergeben:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \lambda(\phi)\, d\phi = NZe$$

Damit ist die Konstante A bestimmt zu:

$$A = \frac{NZe}{\frac{b}{a}\left(U_m(\phi_1,\phi_2) - NZe\xi\right)}, \quad U_m(\phi_1,\phi_2) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left(U_{HF}(\phi) - U_{HF}(\phi_1)\right) d\phi$$



# 9. Longitudinale Strahdynamik mit Raumladung

## 9.3 Berücksichtigung der Raumladung nach dem Hofmann-Pedersen-Modell

Setzt man nun die Konstante A in die Linienladungsdichte ein, so erhält man einen recht übersichtlichen Ausdruck und bildet man gleich daraus die Differenz $\lambda(\phi_s)$-$\lambda(\phi)$

$$\lambda(\phi) = \frac{NZe\left\{U_{HF}(\phi) - U_{HF}(\phi_1)\right\}}{U_m(\phi_1,\phi_2)} \quad\Rightarrow\quad \lambda(\phi_s) - \lambda(\phi) = -\frac{NZe}{U_m(\phi_1,\phi_2)} U_{HF}(\phi)$$

dann erhält man folgende Hamilton-Funktion:

$$H(w,\phi) = -\frac{1}{2}\frac{h\omega_r^2\eta}{\beta^2 E} w^2 + \frac{Ze}{2\pi}\left(1 - \frac{NZe}{U_m(\phi_1,\phi_2)}\frac{gh^2}{2\varepsilon_0 R\gamma^2}\right) U_{HF}(\phi)$$

Der Ausdruck in Klammern ist besonders nett, da er einem erlaubt, die durch Raumladung erzeugte Spannungsreduzierung auszudrücken:

$$\hat{V}_{mod} = \left(1 - \frac{NZe}{U_m(\phi_1,\phi_2)}\frac{gh^2}{2\varepsilon_0 R\gamma^2}\right)\hat{V}$$

Das Integral im Nenner kann man näherungsweise natürlich analytisch ausrechnen, aber mit Hilfe von Mathcad oder Mathematica ist die numerische Berechnung relativ einfach.

Untenstehende Hamilton-Funktion ist wieder unser Startpunkt:

$$H(\Delta\phi, w, t) = -\frac{1}{2}\frac{h\omega_r^2\eta}{E\beta^2}w^2 + \frac{Ze\hat{V}(t)}{2\pi}\left\{\cos(\Delta\phi+\phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi\sin(\phi_s)\right\}$$

Wir machen wieder die Näherung für kleine Amplituden $\Delta\phi$:

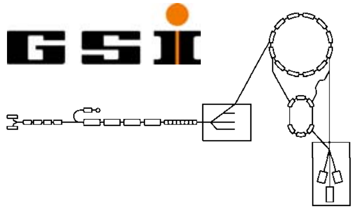
$$\begin{aligned} H(\Delta\phi, w, t) &= -\frac{1}{2}a\,w^2 + \hat{b}\left\{\cos(\Delta\phi+\phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi\sin(\phi_s)\right\} \\ &= -\frac{1}{2}a\,w^2 - \frac{1}{2}\hat{b}\cos(\phi_s)\Delta\phi \\ &= -\frac{1}{2}a\,w^2 - \frac{1}{2}b\Delta\phi \end{aligned}$$

Für $E_s$=const bleibt, erhalten wir die schon bekannten Synchrotron-Schwingungen:

$$\Delta\phi(t) = \Delta\hat{\phi}\cos(\Omega_s t) \qquad w(t) = \hat{w}\sin(\Omega_s t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\Delta\hat{\phi}\sin(\Omega_s t)$$

Das sind die bekannten Ellipsen im $\{\Delta\phi, w\}$-Phasenraum und die Synchrotronfrequenz ist:

$$\Omega_s = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{Ze\hat{V}}{2\pi}\frac{h\omega_r^2\eta}{\beta^2 E}\cos(\phi_s)}$$



# 9. Longitudinale Strahdynamik mit Raumladung

## 9.4 Wiederholung der Erkenntnisse

Während der Beschleunigung ändern sich $E_s$, $\eta_s$ und eventuell V langsam. Bei hinreichend langsamer Änderung (adiabatischer Änderung) solcher Parameter bleibt das Wirkungsintegral konstant:

$$I = \oint p\,dq = \oint w\,d\Delta\phi = \text{const}$$

Die Integration verläuft über eine Synchrotron-Schwingung bzw. über eine Periode.

$$\oint w\,d\Delta\phi = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_s}} \hat{w}\sin(\Omega_s t)\,d\big(\Delta\phi\cos(\Omega_s t)\big) = \hat{w}\Delta\hat{\phi}\Omega_s \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_s}} \sin^2(\Omega_s t)\,dt = \hat{w}\Delta\hat{\phi}\Omega_s \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\Omega_s} = \pi\hat{w}\Delta\hat{\phi}$$

Es folgt, das Produkt $\hat{w}\Delta\phi$ bleibt bei adiabatischer Energieerhöhung konstant. Natürlich bleibt dann auch die Fläche der Ellipse im $\{\Delta\phi, w\}$-Phasenraum bei der Beschleunigung konstant.

Longitudinale Emittanz: Fläche im $\{\Delta\phi, w\}$- Phasenraum geteilt durch $\pi$, die der Strahl einnimmt.

Die longitudinale Emittanz ist in diesem Phasenraum eine Konstante.

Die Form der Ellipse ändert sich allerdings mit wachsender Energie des synchronen Teilchens:

$$\hat{w}\Delta\hat{\phi} = \text{const} = \sqrt{\frac{b}{a}}\Delta\hat{\phi}^2 = \sqrt{\frac{Ze\hat{V}}{2\pi}\frac{\beta^2 E}{h\omega_r^2\eta}}\Delta\hat{\phi}^2 \sim \sqrt{E}\Delta\hat{\phi}^2 \quad\Rightarrow\quad \Delta\hat{\phi} \sim \frac{1}{E^{\frac{1}{4}}} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \Delta\hat{\phi} \sim E^{-\frac{1}{4}} \\[2ex] w \sim E^{\frac{1}{4}} \end{array}$$



GSI RF-Group, P. Hülsmann, Email: P.Huelsmann@gsi.de, Phone: +49 6159 71 2066

## 9.5 Die DGL's im longitudinalen Phasenraum

Wir starten wieder mit der schon bekannten, explizit zeitabhängigen Hamilton-Funktion:

$$H(\Delta\phi, w, t) = -\frac{1}{2} a\, w^2 - \frac{1}{2} b \Delta\phi$$

Mit Hilfe der kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \Delta\dot{\phi} = -a\, w$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta\phi} = -\dot{w} = -b\Delta\phi$$

leitet man die beiden Differentialgleichungen mit Pseudodämfung her

$$\Delta\ddot{\phi}(t) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \Delta\dot{\phi}(t) + a(t) b(t) \Delta\phi(t) = 0$$

$$\ddot{w}(t) - \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} \dot{w}(t) + a(t) b(t) w(t) = 0$$

$\Rightarrow$ Beide DGL's sind vom allgemeinen Typ:

$$y''(x) - f(x) y'(x) + g(x) y(x) = 0$$

Wir haben also folgende DGL zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten:

$$y''(x) - f(x)\,y'(x) + g(x)\,y(x) = 0$$

Durch die Substitution $y(x) = u(x)\,e^{\frac{1}{2}\int f(x)dx}$ werden wir das Dämpfungsglied los, denn es gilt

für die erste- und zweite Ableitung:

$$y'(x) = \left( u'(x) + u(x)\frac{1}{2}y(x) \right) e^{\frac{1}{2}\int f(x)dx}$$

$$y''(x) = \left( u''(x) + u(x)f(x) + u(x)\frac{1}{2}f'(x) + u(x)\frac{1}{2}f^2(x) \right) e^{\frac{1}{2}\int f(x)dx}$$

Dann wird aus der obigen DGL eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne Dämpfung:

$$u''(x) + \left\{ g(x) + \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{4}f^2(x) \right\} u(x) = 0$$

d.h. das Dämpfungsglied lässt sich wegtransformieren.

Wir nehmen jetzt unsere Dgl. für $\Delta\phi(t)$

$$\Delta\ddot{\phi}(t)-\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\Delta\dot{\phi}(t)+a(t)b(t)\Delta\phi(t)=0$$

und setzen gemäß der Vorschrift die Koeffizienten von oben ein. Wir erhalten dann:

$$\ddot{u}(t)+\left(a(t)b(t)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2\right)u(t)=\ddot{u}(t)+\left(a(t)b(t)+\frac{1}{2}\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}-\frac{3}{4}\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2\right)u(t)=0$$

Der zweite und dritte Term in der Klammer oben rechts sind klein von zweiter Ordnung, daher werden sie im Vergleich zum ersten Term vernachlässigt (adiabatische Änderung):

$$\ddot{u}(t)+\Omega_s^2(t)u(t)=0$$

Hier machen wir jetzt folgenden Lösungsansatz:

$$u(t)=\xi(t)e^{i\int_{t_0}^{t}\Omega_s(t)dt}$$

Bei adiabatischer Änderung fällt wieder der erste Term weg. Dann muß der Imaginärteil Null sein:

$$\ddot{\xi}(t)+i\left(\dot{\Omega}_s(t)\xi(t)+2\Omega_s(t)\dot{\xi}(t)\right)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)}=-\frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}_s(t)}{\Omega_s(t)}$$

Die Lösung für $\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}_s(t)}{\Omega_s(t)}$ ist einfach $\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_s(t)}}$

Um den Überblick zu bewahren fassen wir jetzt mal zusammen:

Die erste Substitution war $\Delta\phi(t) = u(t)\, e^{\frac{1}{2}\int \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}dt} = u(t)\sqrt{a(t)}$ , denn das Integral ist ausführbar.

Für die unbedämpfte DGL machten wir den Lösungsansatz: $u(t) = \frac{A}{\sqrt{\Omega_s(t)}}\, e^{i\int_{t_0}^{t} \Omega_s(t)dt}$

Setzt man den Lösungsansatz in die Substitution ein, so erhält man für $\Delta\phi(t)$ die Lösung:

$$\Delta\phi(t) = A\sqrt{\frac{a(t)}{\Omega_s(t)}}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\Omega_s(t')dt' + \delta_1\right)$$

Da wir die Lösung für $\Delta\phi(t)$ schon kennen, kann man auch die Lösung für w(t) hinschreiben:

$$\ddot{w} - \frac{\dot{b}}{b}\dot{w} + abw = 0 \quad \Rightarrow \quad w(t) = B\sqrt{\frac{b(t)}{\Omega_s(t)}}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\Omega_s(t')dt' + \delta_2\right)$$

Anhand der beiden Lösungen kann man jetzt die Abhängigkeit von der Energie unmittelbar sehen:

$$\Delta\phi(t) = A\sqrt{\frac{a(t)}{\Omega_s(t)}}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\Omega_s(t')dt' + \delta_1\right) \quad\Rightarrow\quad \Delta\hat{\phi}(t) = A\sqrt{\frac{a(t)}{\Omega_s(t)}} \quad \sim \quad E^{-\frac{1}{4}}$$

$$w(t) = B\sqrt{\frac{b(t)}{\Omega_s(t)}}\cos\left(\int_{t_0}^{t}\Omega_s(t')dt' + \delta_2\right) \quad\Rightarrow\quad \hat{w}(t) = B\sqrt{\frac{b(t)}{\Omega_s(t)}} \quad \sim \quad E^{\frac{1}{4}}$$

Die Lösung sind natürlich wieder Ellipsenbahnen. Da die Ellipsenfläche aus den beiden Halbachsen berechnet werden kann, ergibt sich einfach:

$$\text{Phasenraumfläche} = \pi\,\Delta\hat{\phi}(t)\,\hat{w}(t) = AB\sqrt{\frac{b(t)}{\Omega_s(t)}}\sqrt{\frac{b(t)}{\Omega_s(t)}} = AB = \text{const}$$

Damit ist gezeigt: Die Dichte der Teilchen bleibt bei Beschleunigung im $\{\Delta\phi, \Delta E/\omega_r\}$-Phasenraum konstant. Diese Variablen sind also zueinander kanonisch konjugiert.

Wir starten wieder mit der Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\Delta\phi$ mit Pseudodämpfung

$$\Delta\ddot{\phi}-\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\Delta\dot{\phi}+a(t)b(t)\Delta\phi=0$$

Um die Pseudodämpfung loszuwerden machen wir wieder die schon bekannte Substitution

$$\Delta\phi(t)=u(t)e^{\frac{1}{2}\int\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}dt}=u(t)\sqrt{a(t)}$$

Die unsere Dgl. überführt in:

$$\ddot{u}+\left(a(t)b(t)+\frac{1}{2}\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}-\frac{3}{4}\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2\right)u=\ddot{u}+K(t)u=0$$

Wir werden diesmal nichts vernachlässigen; wir fassen nur alles zu einem Koeffizienten K(t) zusammen. Dann machen wir für u(t) folgenden Ansatz:

$$u(t)=A\xi(t)\cos\left(\psi(t)+\varphi\right)$$

Bitte im Kopf behalten, daß durch die erste Substitution die Lösung für $\Delta\phi(t)$ so aussieht:

$$\Delta\phi(t)=A\sqrt{a(t)}\xi(t)\cos\left(\psi(t)+\varphi\right)$$

Wir bilden also die erste und zweite Zeitableitung unseres Lösungsansatzes für u(t):

$$\dot{u}(t)=A\left(\dot{\xi}(t)\cos\left(\psi(t)+\varphi\right)-\xi(t)\dot{\psi}(t)\sin\left(\psi(t)+\varphi\right)\right)$$

$$\ddot{u}(t)=A\left(\left(\ddot{\xi}-\xi\dot{\psi}^2\right)\cos\left(\psi+\varphi\right)-\left(2\dot{\xi}\dot{\psi}+\xi\ddot{\psi}\right)\sin\left(\psi+\varphi\right)\right)$$

Das setzen wir unsere Dgl. $\ddot{u}+K(t)u=0$ Und erhalten durch ordnen nach sin und cos :

$$\left(\ddot{\xi}-\xi\dot{\psi}^2+K\xi\right)\cos\left(\psi+\varphi\right)-\left(2\dot{\xi}\dot{\psi}+\xi\ddot{\psi}\right)\sin\left(\psi+\varphi\right)=0$$

Damit diese Gleichung für alle $\varphi$ erfüllt ist, müssen sowohl der Vorfaktor des Sinus, als auch der Vorfaktor des Cosinus, beide für sich, identisch verschwinden. Also muß gelten:

$$\ddot{\xi}-\xi\dot{\psi}^2+K\xi=0$$

$$2\dot{\xi}\dot{\psi}+\xi\ddot{\psi}=0$$

Beide Gleichungen sind Bestimmungsgleichungen für $\psi$(t) und $\xi$(t), so daß

$u(t)=A\xi(t)\cos\left(\psi(t)+\varphi\right)$ Lösung von $\ddot{u}+K(t)u=0$ ist.

# 9. Longitudinale Strahdynamik mit Raumladung

## 9.10 Ansatz zur Beschreibung der Bewegung von Ellipsen im longitudinalen Phasenraum

Die Gleichung $2\dot{\xi}\dot{\psi}+\xi\ddot{\psi}=0$ läßt sich sofort integrieren:

$$\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}}=-2\frac{\dot{\xi}}{\xi} \quad => \quad \ln\left(\dot{\psi}\right)=-2\ln\left(\xi\right) \quad => \quad \dot{\psi}=\frac{1}{\xi^2} \quad => \quad \psi=\int\frac{1}{\xi^2}\,dt$$

Elimination von $\psi$' in der Gleichung $\ddot{\xi}-\xi\dot{\psi}^2+K\xi=0$ liefert eine Differentialgleichung als Bestimmungsgleichung für $\xi$:

$$\ddot{\xi}+K\xi-\frac{1}{\xi^3}=0$$

Das ist die Dgl. für die Strahl-Enveloppe im longitudinalen Phasenraum. Die Dgl. Hat einen interessanten Term, nämlich $1/\xi^3$. Er sorgt dafür, das $\xi$ niemals durch Null geht, da dabei der letzte Term über alle Maßen ansteigen würde.

Nach Ermittelung von $\xi$ ergibt sich $\psi$ gemäß des obigen Integrals. Jetzt haben wir die Lösung für:

$$\Delta\phi(t)=A\sqrt{a(t)}\,\xi(t)\cos\left(\psi(t)+\varphi\right)$$

Wir haben also formal die Lösung für $\Delta\phi$ gefunden, wir brauchen aber noch die Lösung für w

$$\Delta\phi(t) = A\sqrt{a(t)}\xi(t)\cos\left(\psi(t)+\varphi\right)$$

Eine der kanonischen Bewegungsgleichungen verknüpft jedoch $\Delta\phi$ mit w:

$$\frac{\partial H}{\partial w} = -\Delta\dot{\phi} = -aw$$

Leitet man $\Delta\phi$ nach der Zeit ab, dann erhält man folgende Gleichung für w:

$$w(t) = -\frac{A}{a}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{\sqrt{a}}\xi + \sqrt{a}\,\dot{\xi}\right)\cos(\psi+\varphi) - \sqrt{a}\frac{1}{\xi}\sin(\psi+\varphi)\right]$$

$$\Delta\hat{\phi} = A\sqrt{a}\xi \qquad\qquad \hat{w} = \frac{A}{\sqrt{a}}\frac{1}{\xi}$$

$$\text{Phasenraumfläche} = \pi\Delta\hat{\phi}\,\hat{w} = A\sqrt{a}\,\xi\,A\frac{1}{\sqrt{a}\,\xi} = A^2 = \text{const}$$