

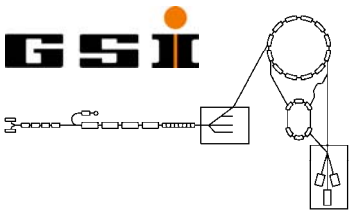
# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

Vorlesungsfolien 15.06.2012

## Inhalt

### 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

- 8.1 Beschleunigung
- 8.2. Die GSI-Beschleunigeranlagen
- 8.3. Mit welchen Frequenzen hat man es zu tun?
- 8.4. Die SIS18-Beschleunigerkavität
- 8.5. Die Darstellung des elektrischen Feldes im Spalt
- 8.6. Momentum Compaction
- 8.7. Was ist Dispersion?
- 8.8. Stabilität
- 8.9. Das synchrone Teilchen
- 8.10. Das unsynchrone Teilchen
  - 8.10.1 HF-Phasendifferenz und Impulsunschärfe
  - 8.10.2 Die longitudinale Hamilton-Funktion
  - 8.10.3 Die Potential-Funktion
  - 8.10.4 Das Bucket
  - 8.10.5 Hamilton-Funktion für kleine  $\Delta\Phi$
  - 8.10.6 Ellipsen-Näherung
  - 8.10.7 Bewegung der Teilchen im Phasenraum
  - 8.10.8 Das stationäre Bucket
  - 8.10.9 Strahleinfang mit stationärem Bucket
  - 8.10.10 Welche Spannung braucht man? (Beispiel)
  - 8.10.11 Wie lang ist der Bunch im Ring? (Beispiel)
  - 8.10.12 Das beschleunigende Bucket
  - 8.10.13 Näherungsweise Behandlung des beschleunigenden Buckets
  - 8.10.14 Energieabhängigkeit, longitudinale Emittanz



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

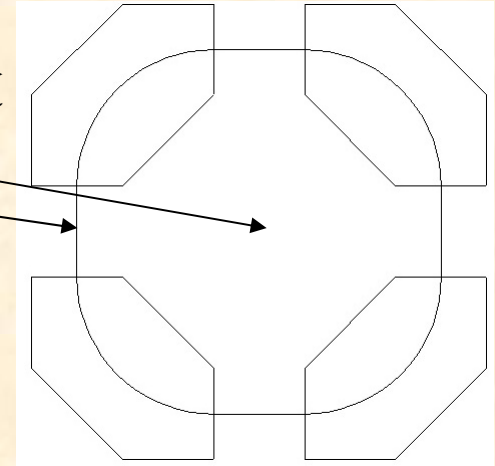
#### 8.10.1 HF-Phasendifferenz und Impulsunschärfe

Eine kleine Zwischenbetrachtung: Was ist eigentlich mit der sich ändernden mag. Induktion?

Ausgangspunkt ist das Faraday'sche Gesetz:  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$

$L$  ist der Umfang des Sollorbits und  $A$  ist die Fläche innerhalb des Sollorbits. Die elektrische Feldstärke  $E_s$  entlang des Sollorbits ist dann:

$$E_s \cdot 2\pi R = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$



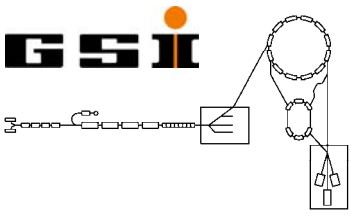
Die Kraftwirkung auf ein Teilchen im Synchrotron ist dann für un- und synchrone Teilchen:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{q\hat{V}}{2\pi R} \sin(\phi) - \frac{q}{2\pi R} \int_0^R 2\pi r \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) dr,$$

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{q\hat{V}}{2\pi R_0} \sin(\phi_0) - \frac{q}{2\pi R_0} \int_0^{R_0} 2\pi r \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) dr$$

Wir haben jetzt eine durch das Induktionsgesetz modifizierte Bewegungsgleichung:

$$R \frac{dp}{dt} - R_0 \frac{dp_0}{dt} = \frac{q\hat{V}}{2\pi} (\sin(\phi) - \sin(\phi_0)) - \frac{q}{2\pi} \int_{R_0}^R 2\pi r \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) dr$$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.1 HF-Phasendifferenz und Impulsunschärfe

Mit der schon weiter oben angewendeten Methode vereinfacht sich die linke Seite zu:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega_r} \right) = \frac{q \hat{V}}{2\pi} (\sin(\phi) - \sin(\phi_0)) - \frac{q}{2\pi} \int_{R_0}^R 2\pi r \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) dr$$

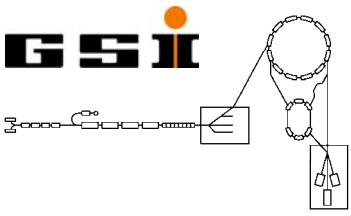
Da der Unterschied zwischen  $R$  und  $R_0$  sehr klein ist, kann man auch das Integral vereinfachen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega_r} \right) = \frac{q \hat{V}}{2\pi} (\sin(\phi) - \sin(\phi_0)) - q R_0 \frac{d\langle B \rangle}{dt} \Delta R$$

Das lässt sich mit Hilfe bereits bekannter Relationen noch weiter vereinfachen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega_r} \right) = \frac{q \hat{V}}{2\pi} (\sin(\phi) - \sin(\phi_0)) - \frac{\Delta p}{\tau_r} \Delta R = \frac{q \hat{V}}{2\pi} (\sin(\phi) - \sin(\phi_0)) - \frac{1}{2\pi} \Delta E \left( \frac{\Delta R}{R_0} \right)$$

Dieser Ausdruck gilt, falls der ganze Fluß innerhalb des Sollorbits zurückgeführt wird. Wenn man hier Werte einsetzt (was wir später tun werden) erkennt man sehr schnell, daß der letzte Term im Vergleich zum Spannungsterm mindestens zwei Größenordnungen kleiner ist. Er kann also getrost vernachlässigt werden. Bei Synchrotrons mit H-Magneten ist er sowieso klein (Faktor 0,5), aber auch bei Synchrotrons, die eine Induktionsrückführung vollständig im Innern des Sollorbits haben, ist er vernachlässigbar.



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.2 Die longitudinale Hamilton-Funktion

Wir haben also jetzt die Bewegungsgleichungen erster Ordnung im Phasenraum gefunden:

$$\frac{d}{dt} \Delta\phi = -\frac{h\omega_r^2 \eta}{E\beta^2} \left( \frac{\Delta E}{\omega_r} \right)$$

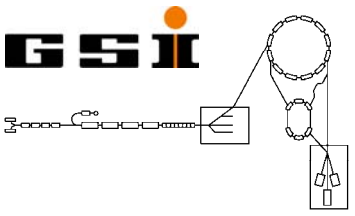
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega_r} \right) = \frac{e\hat{V}}{2\pi} \{ \sin(\phi) - \sin(\phi_s) \}$$

Anhand der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen können wir die Hamilton-Funktion berechnen:

$$\frac{d}{dt} (\Delta\phi) = \frac{\partial H}{\partial (\Delta E / \omega_r)}$$

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega_r} \right) = \frac{\partial H}{\partial \Delta\phi}$$

$$H(\Delta\phi, w, t) = -\frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{E\beta^2} w^2 + \frac{e\hat{V}(t)}{2\pi} \{ \cos(\Delta\phi + \phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s) \}$$



# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

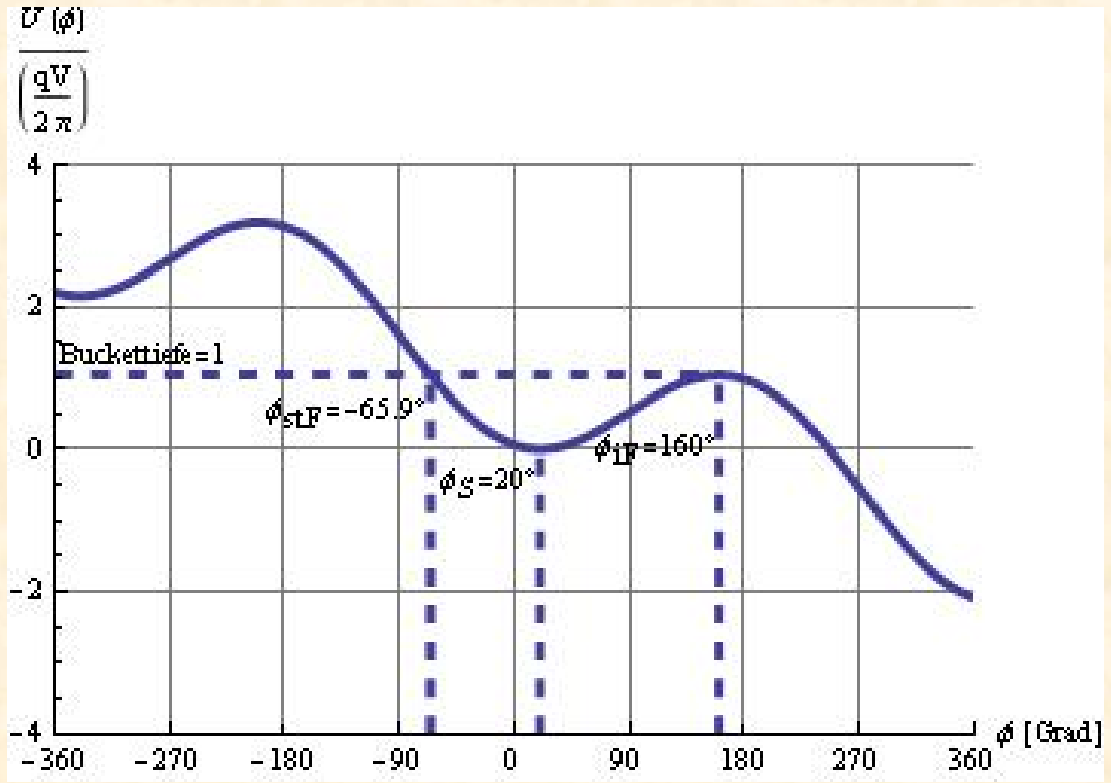
## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

### 8.10.3 Die Potential-Funktion



$$H(\Delta\phi, w, t) = -\frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{E\beta^2} w^2 + \frac{e\hat{V}(t)}{2\pi} \left\{ \cos(\Delta\phi + \phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s) \right\}$$

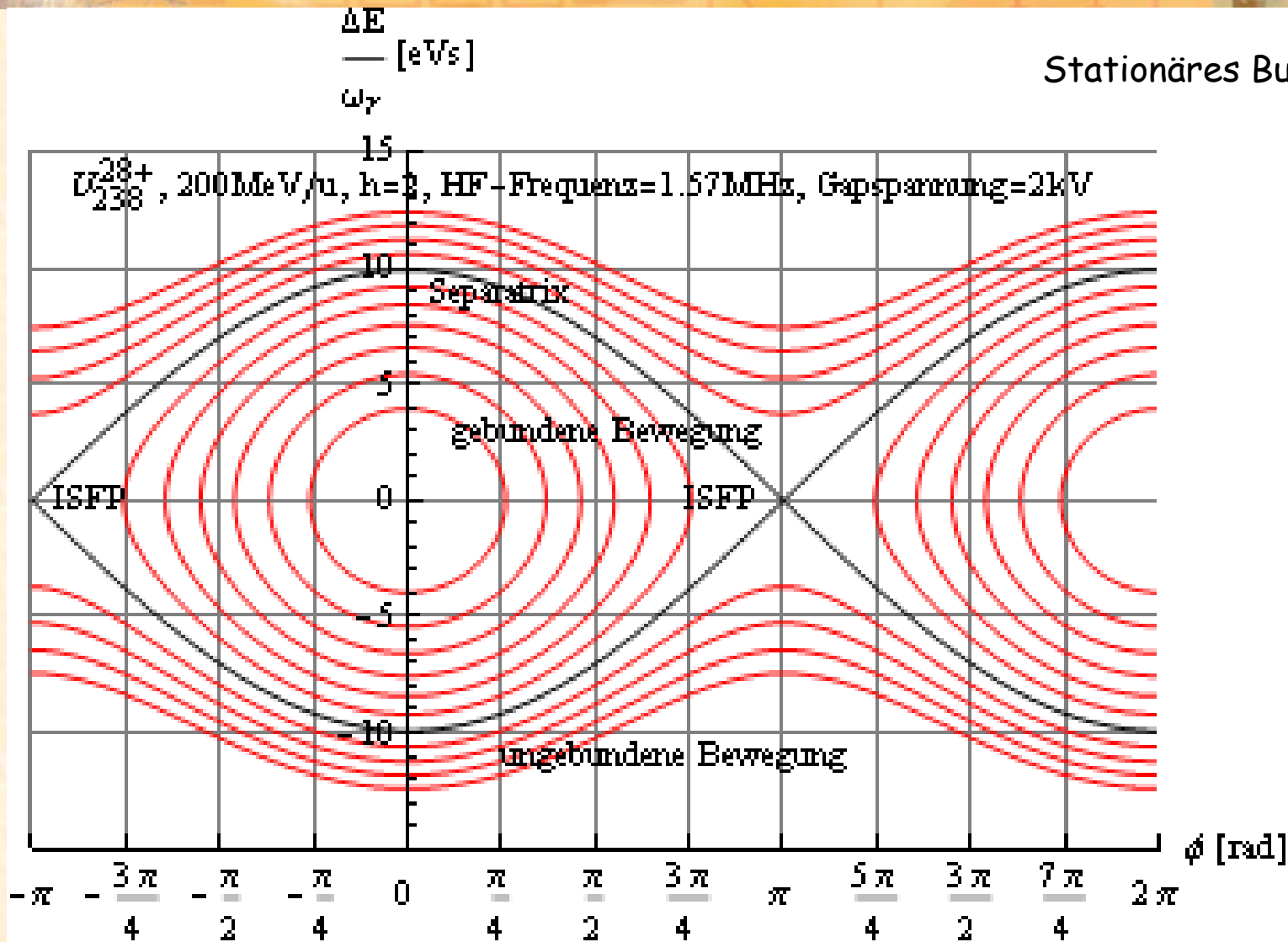
$$U(\phi) = -\frac{e\hat{V}}{2\pi} \left\{ \cos(\phi) - \cos(\phi_s) + (\phi - \phi_s) \sin(\phi_s) \right\}$$



# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

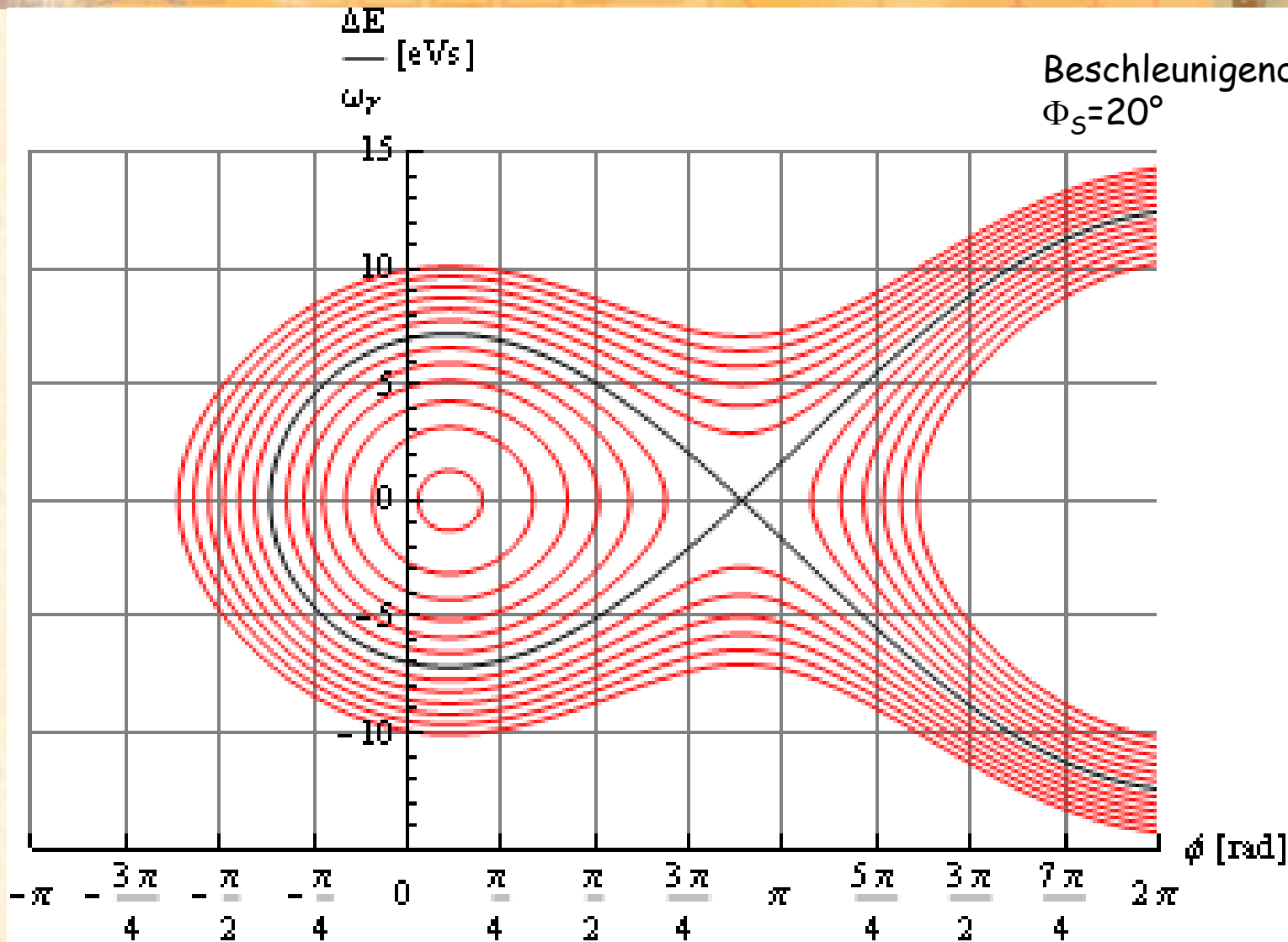
### 8.10.3.1 Stationäres Bucket $\Phi_S=0^\circ$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

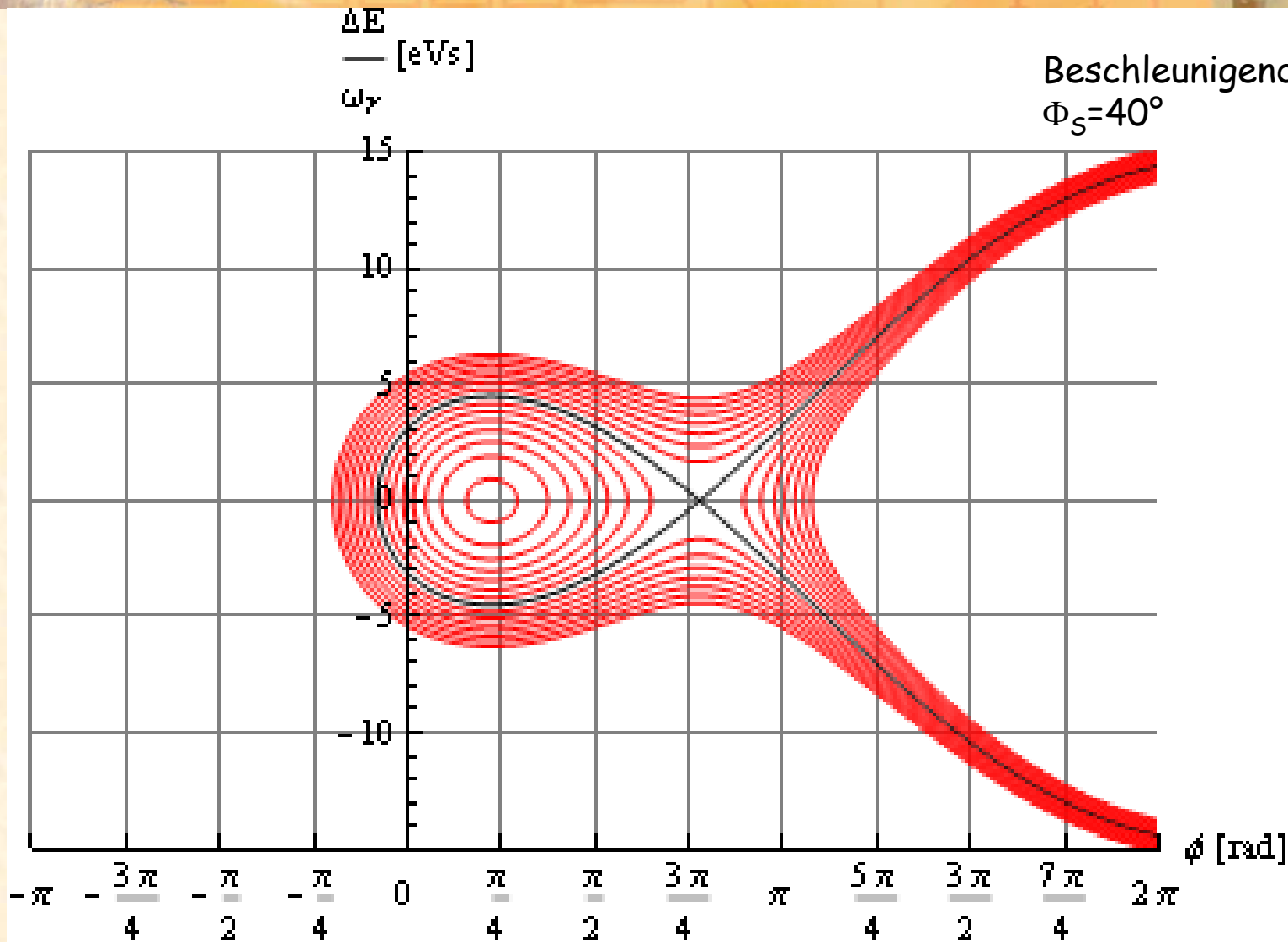
#### 8.10.3.2 Beschleunigendes Bucket $\Phi_S=20^\circ$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.3.3 Beschleunigendes Bucket $\Phi_S = 40^\circ$

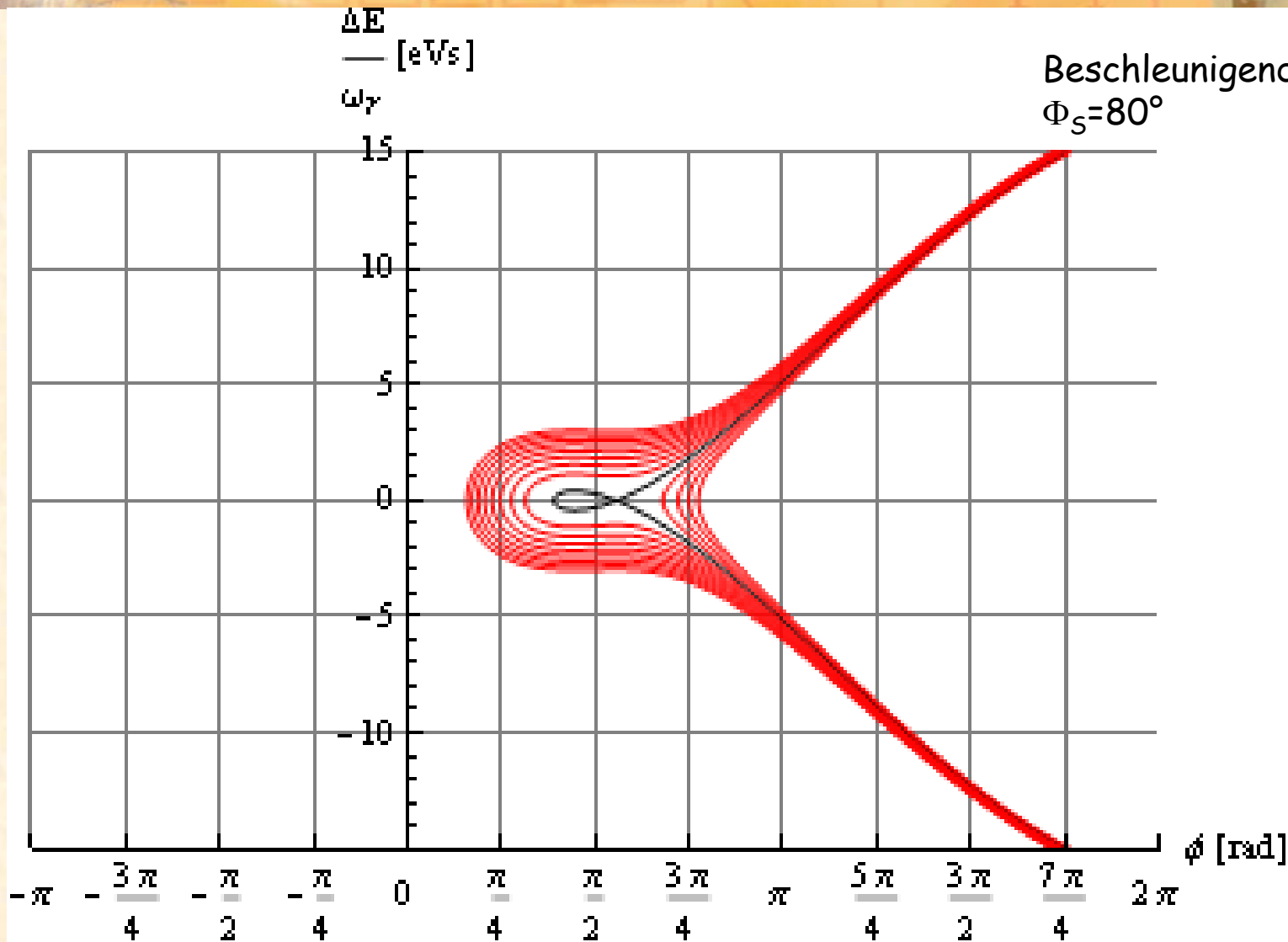




## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

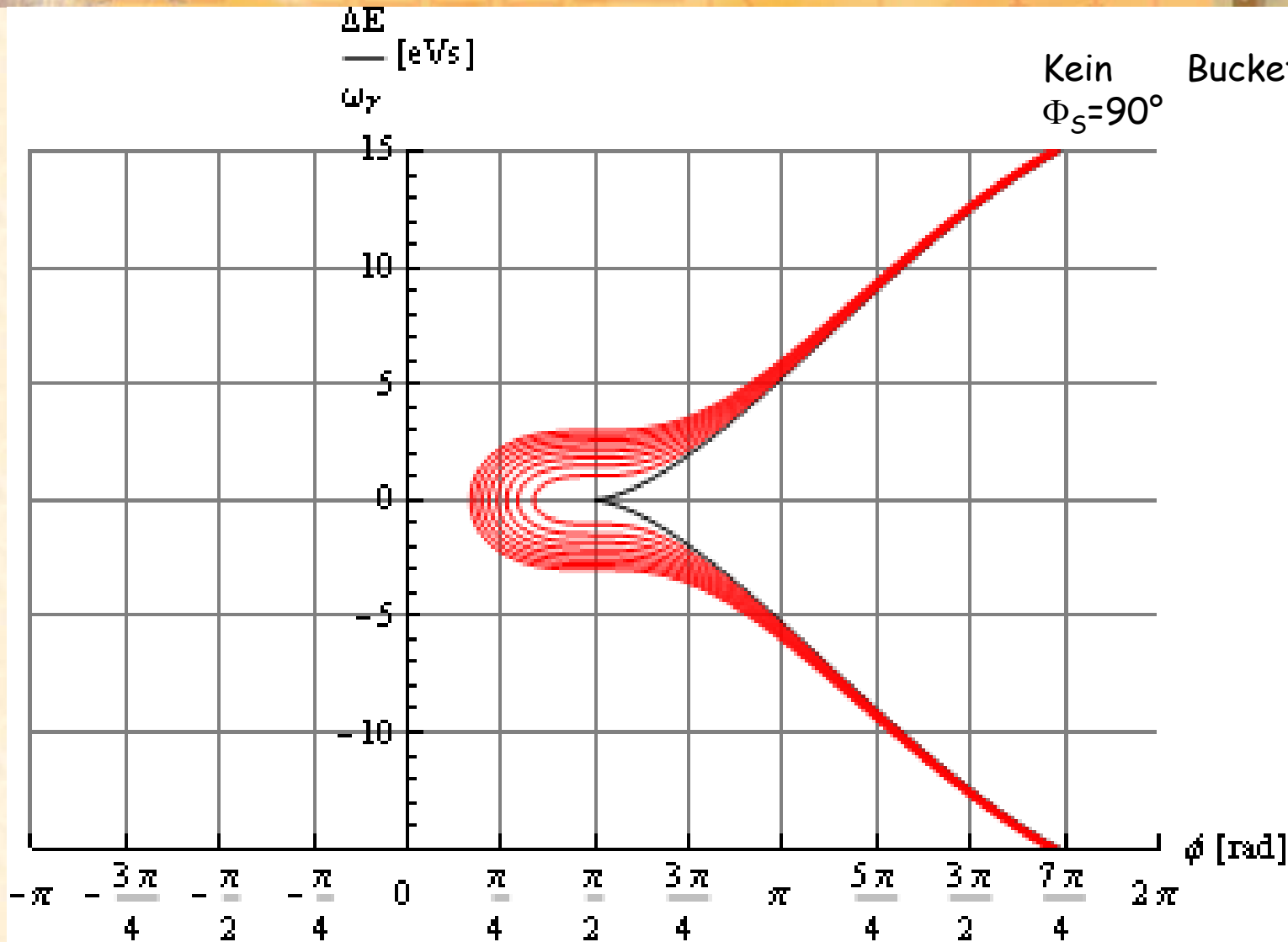
#### 8.10.3.4 Beschleunigendes Bucket $\Phi_S = 80^\circ$

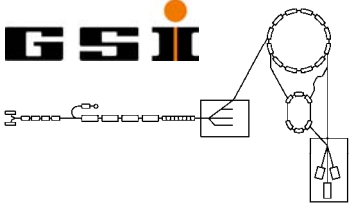


# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

### 8.10.3.5 Kein Bucket mehr





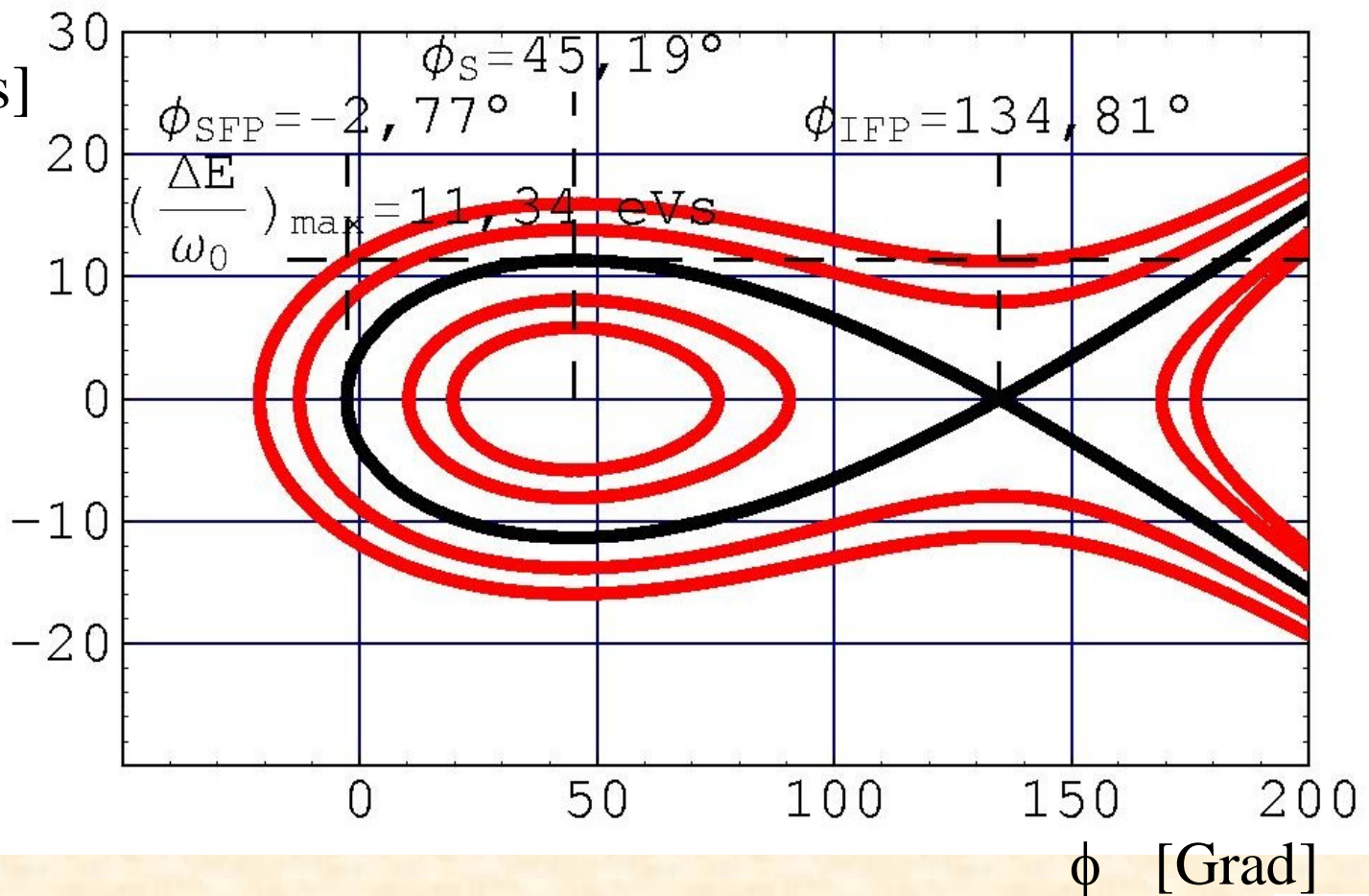
# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

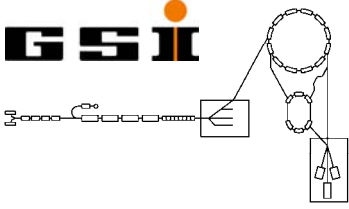
## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

### 8.10.4 Das Bucket

$$H(\Delta\phi, w, t) = -\frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{E\beta^2} w^2 + \frac{e\hat{V}(t)}{2\pi} \left\{ \cos(\Delta\phi + \phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s) \right\}$$

$\frac{\Delta E}{\omega_r}$   
[eVs]





## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.5 Hamilton-Funktion für kleine $\Delta\Phi$

Wir starten nun unsere Untersuchungen, indem wir die Hamiltonfunktion für kleine Phasendifferenzen hinschreiben. Aus

$$H(\Delta\phi, w, t) = -\frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{E\beta^2} w^2 + \frac{e\hat{V}(t)}{2\pi} \left\{ \cos(\Delta\phi + \phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s) \right\}$$

wird mit Hilfe der Taylor-Entwicklung

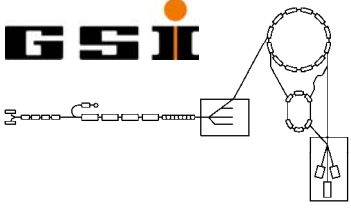
$$\cos(\Delta\phi + \phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s) = \cos(\Delta\phi)\cos(\phi_s) - \sin(\Delta\phi)\sin(\phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s)$$

$$\cos(\Delta\phi + \phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s) = \cos(\phi_s) \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2!}\right) - \Delta\phi \sin(\phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s)$$

$$\cos(\Delta\phi + \phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s) \approx -\cos(\phi_s) \frac{\Delta\phi^2}{2}$$

haben wir schließlich, bis auf die Vorzeichen, die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators:

$$H(\Delta\phi, w) = -\frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{E\beta^2} w^2 - \frac{1}{2} \frac{e\hat{V}}{2\pi} \cos(\phi_s) \Delta\phi^2$$



# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

### 8.10.6 Ellipsen-Näherung



Man sieht unmittelbar, daß die Kurven  $H=\text{const}$  ähnliche Ellipsen sind. Schreibt man die Hamiltonfunktion mit den Abkürzungen  $a$  und  $b$  auf

$$H(\Delta\phi, w) = -\frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{E\beta^2} w^2 - \frac{1}{2} \frac{e\hat{V}}{2\pi} \cos(\phi_s) \Delta\phi^2 = -\frac{1}{2} a w^2 - \frac{1}{2} b \Delta\phi^2$$

dann kann man die Normalform der Ellipsengleichung hinschreiben

$$\left( \frac{w}{\sqrt{\frac{2(-H)}{a}}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta\phi}{\sqrt{\frac{2(-H)}{b}}} \right)^2 = \left( \frac{w}{w_{\max}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\max}} \right)^2 = 1 \quad \text{mit den Halbachsen}$$

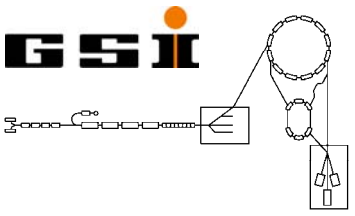
$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2(-H)}{a}} \quad \Delta\phi_{\max} = \sqrt{\frac{2(-H)}{b}}$$

womit dann auch die Fläche  $A$  der Ellipse durch

$$A = \pi \Delta\phi_{\max} w_{\max} = \pi \frac{2(-H)}{\sqrt{ab}} = \pi \frac{2(-H)}{\Omega_s}$$

gegeben ist.  $\Omega_s$  ist die Kreisfrequenz der Synchrotronschwingung ist. Anhand der Bewegungsgleichung kann man das erkennen:

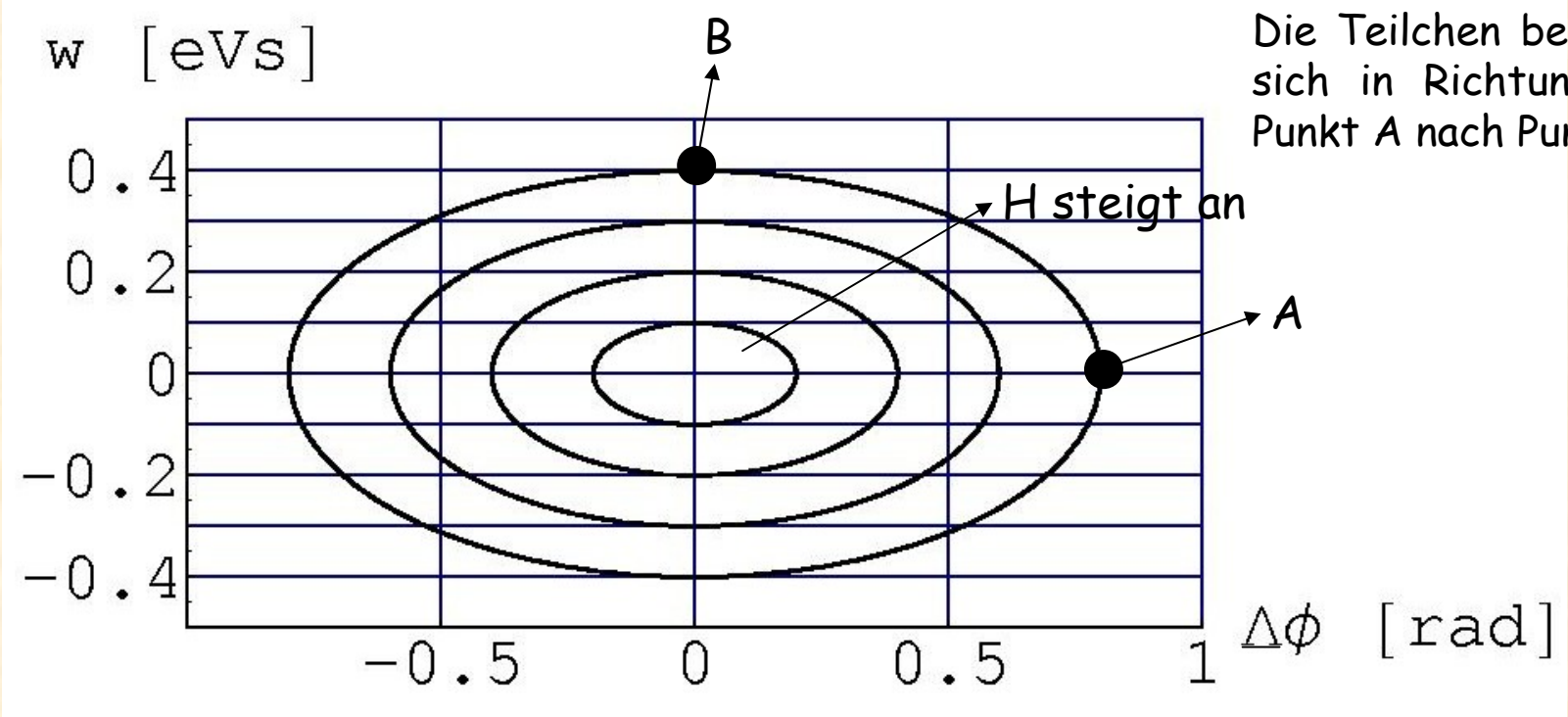
$$\ddot{\Delta\phi} + ab\Delta\phi = \ddot{\Delta\phi} + \Omega_s^2 \Delta\phi = 0$$



# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

### 8.10.7 Bewegung der Teilchen im Phasenraum



Die Teilchen bewegen sich in Richtung von Punkt A nach Punkt B.

Am Punkt A gilt:

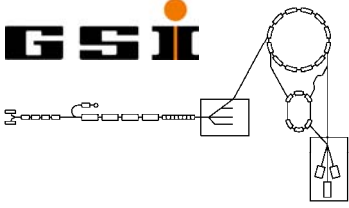
$$\frac{\partial H}{\partial \Delta\phi} = -b\Delta\phi = -\dot{w} < 0 \Rightarrow \dot{w} > 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = -aw = \Delta\phi = 0$$

Am Punkt B gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial w} = -aw = \Delta\phi < 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta\phi} = -b\Delta\phi = -\dot{w} = 0$$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.8 Das stationäre Bucket



$$H = \frac{1}{2}aw^2 + b(\cos(\phi) - 1)$$

Beim stationären Bucket, also dem nicht beschleunigenden Bucket, ist die Sollphase des synchronen Teilchens Null und die beiden Fixpunkte sind  $\pi$  und  $-\pi$ .

Da bei den Fixpunkten  $w=0$  ist, nimmt die Hamiltonfunktion für die Separatrix den folgenden Wert an:

$$H_{Sx} = 2 \frac{eV}{2\pi}$$

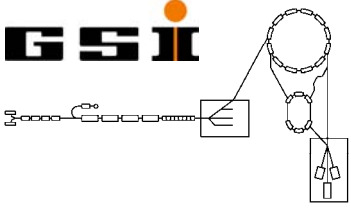
Dadurch gewinnt man die Kurvengleichung der Separatrix, wenn man oben einsetzt:

$$\frac{1}{2}aw^2 = \frac{e\hat{V}}{2\pi}(\cos(\phi) + 1) \quad w(\phi) = \pm \sqrt{2 \frac{b}{a}(\cos(\phi) + 1)} = \pm 2\sqrt{\frac{b}{a}} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Die Tiefe des Buckets ist dann gleich:  $w_{\max} = 2\sqrt{\frac{b}{a}}$

Die Bucketfläche  $A$  kann man durch Integration ermitteln:

$$A = 2 \int_{-\pi}^{\pi} w(\phi) d\phi = 8\sqrt{\frac{b}{a}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) d\frac{\phi}{2} = 16\sqrt{\frac{b}{a}}$$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.8 Das stationäre Bucket



Was braucht man?

Man braucht eine große Bucketfläche bzw. eine große Buckettiefe. Dann kann man bei gegebener Impulsunschärfe den Strahl sicher transportieren.

$$A = 16 \sqrt{\frac{b}{a}} = 16 \sqrt{\frac{Ze\hat{V}\beta^2 E}{2\pi h \omega_r^2 \eta}}$$

$$W_{\max} = 2 \sqrt{\frac{b}{a}} = 2 \sqrt{\frac{Ze\hat{V}\beta^2 E}{2\pi h \omega_r^2 \eta}}$$

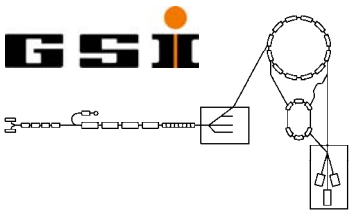
Beide Formeln machen eine Aussage über die Aufnahmefähigkeit des so genannten stationären Buckets.

Mal angenommen die Energie, und damit  $\beta$  und die Umlaufkreisfrequenz wären gegeben. Dann wäre es am günstigsten, natürlich klar, die Spannungsamplitude am Spalt so hoch wie möglich zu schrauben und gleichzeitig die Harmoniezahl  $h$  möglichst klein zu machen. Dann wären die Phasenraumfläche und die Tiefe des Buckets am größten.

Aber dann müssten wir HF-Systeme im Bereich der Umlauffrequenz realisieren, was im Bereich von 200 kHz nicht gerade einfach ist. Bei  $h=2$  scheint es möglich, also bei 400 kHz oder wie es im Moment am SIS18 realisiert ist, bei  $h=4$ , also bei 800 kHz.

Dabei ist immer der schlimmste Fall, wie man anhand der obigen Formeln sieht, der Anfang der Beschleunigungsrampe bei niedriger Energie. Dort braucht man, um den Strahl sicher zu halten, die höchsten Spannungen.

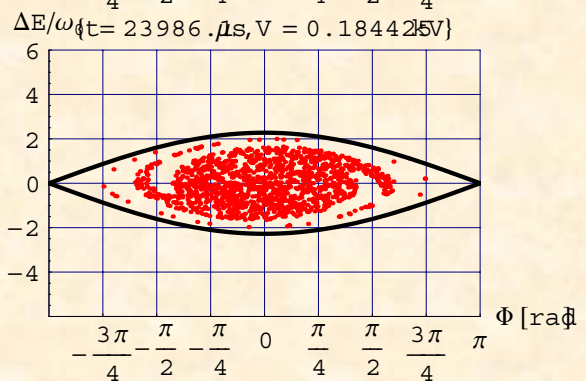
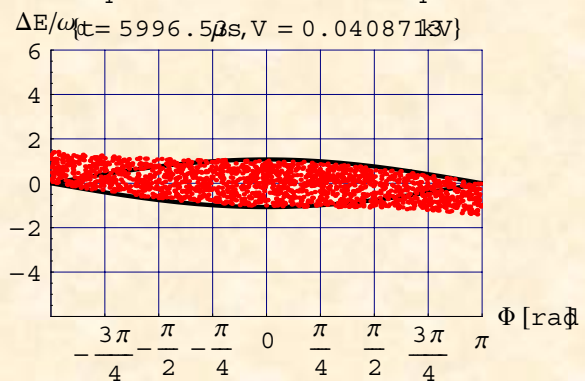
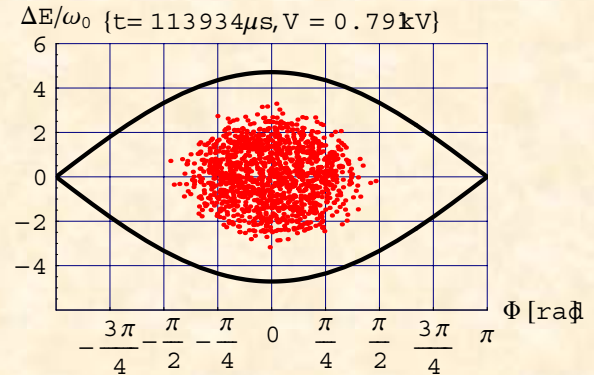
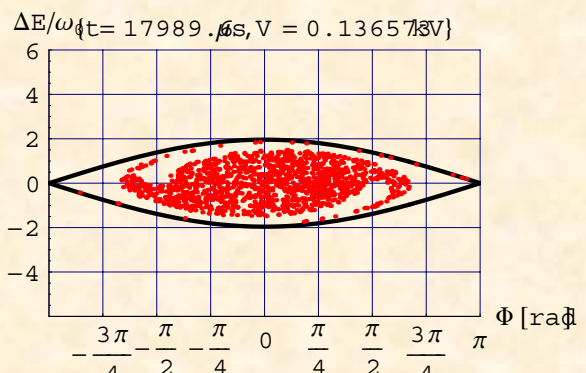
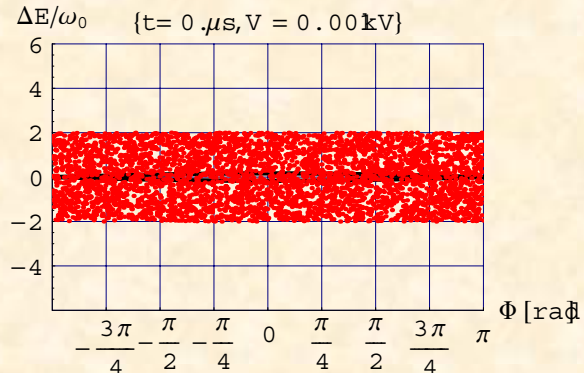
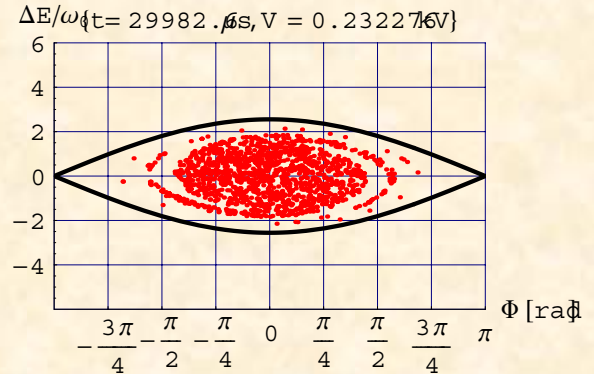
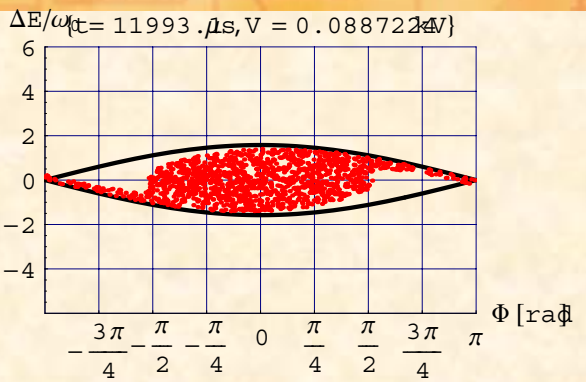
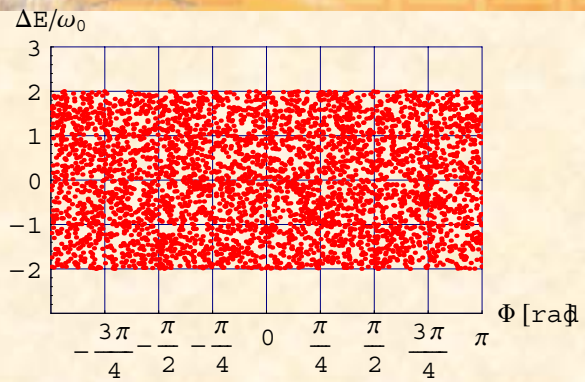


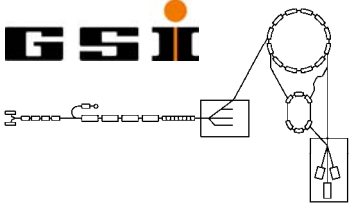


# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

### 8.10.9 Strahleinfang mit stationärem Bucket





## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.10 Welche Spannung braucht man? (Beispiel)

$U_{238}^{28+}$ -Ionen haben nach dem Einschub in das Synchrotron SIS18 eine kinetische Energie von 11,4 MeV/u. Daraus folgt für die relativistischen Größen  $\gamma$  und  $\beta$

Aus  $E_{\text{kin}} = E - E_{\text{Ruh}} = m_0 c_0^2 \gamma - m_0 c_0^2$  berechnet man  $\gamma = 1 + \frac{11,4 \text{ MeV/u}}{931 \text{ MeV/u}} = 1,012$

und daraus  $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = 0,155$ . Die Umlauffrequenz bzw. die Umlaufkreisfrequenz ist

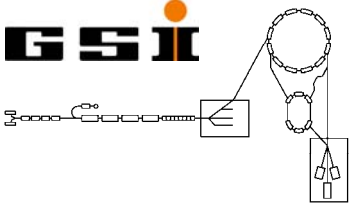
$$f_r = \frac{c_0 \beta}{L} = \frac{2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 0,155}{216,72 \text{ m}} = 214,42 \text{ kHz} \Rightarrow \omega_r = 1347,24 \text{ kHz}$$

Die Ionenenergie ist  $E = N m_0 c_0^2 \gamma = 238 \cdot \gamma \cdot 931 \text{ MeV/u} = 224,24 \text{ GeV}$

Die Impulsunschärfe nach dem Einschub aus dem UNILAC ins SIS18 ist  $\Delta p/p = \pm 1 \cdot 10^{-3}$

$$\frac{\Delta E}{\omega_r} = \frac{\beta^2 E}{\omega_r} \frac{\Delta p}{p} = \frac{0,155^2 \cdot 224,24 \cdot 10^9 \text{ eV}}{1347,24 \cdot 10^3 \text{ 1/s}} \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 4 \text{ eVs}$$

Die Phasenraumfläche kann man jetzt leicht ausrechnen:  $A = h 2 \frac{\Delta E}{\omega_r} 2\pi = 200 \text{ eVs}$



# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

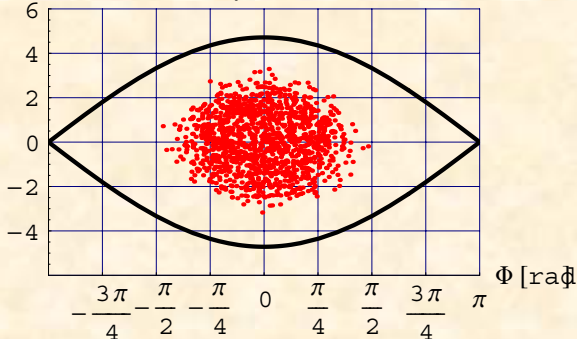
## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

### 8.10.10 Welche Spannung braucht man? (Beispiel)

Um den Strahl sicher zu fangen, füllen wir die Separatrix-Fläche nur zu 2/3 mit Teilchen auf, d.h. wir verlangen eine Phasenraumfläche, die 1,5 mal größer ist als die Phasenraumfläche des umlaufenden Strahls

$$A = 16 \sqrt{\frac{b}{a}} = 16 \sqrt{\frac{Ze\hat{V}\beta^2 E}{2\pi h \omega_r^2 \eta}} = \frac{3}{2} \cdot 50 \text{ eVs} = 75 \text{ eVs}$$

$\Delta E/\omega_0$  { $t = 113934 \mu\text{s}, V = 0.79 \text{ kV}$ }

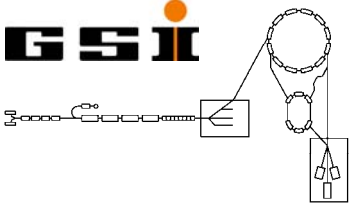


$$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha = \frac{1}{1,012^2} - \frac{1}{5,45^2} = 0,94$$

$$a = \frac{h \omega_r^2 \eta}{\beta^2 E} = 1271 \frac{1}{\text{eVs}^2}$$

$$\hat{V} = \frac{2\pi \cdot 1271}{28 \cdot e \cdot \text{eVs}^2} \cdot \left( \frac{1}{16} \cdot 75 \text{ eVs} \right)^2 = 6300 \text{ V}$$

Wir benötigen also 6300 V bei 800 kHz um den Strahl sicher einzufangen.



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.11 Wie lang ist der Bunch im Ring? (Beispiel)

$$\left( \frac{w}{\sqrt{\frac{2H}{a}}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta\phi}{\sqrt{\frac{2H}{b}}} \right)^2 = \left( \frac{w}{w_{\max}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\max}} \right)^2 = 1$$

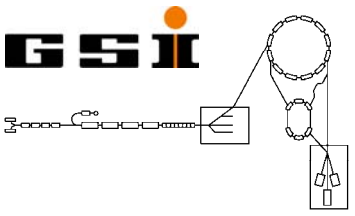
$$A = \pi \Delta\phi_{\max} w_{\max} = \pi \frac{2H}{\sqrt{ab}} = \pi \frac{2H}{\Omega_s}$$

$$\Omega_s = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{Ze\hat{V}}{2\pi} \frac{h\omega_r^2 \eta}{E\beta^2}} = 6 \text{ kHz} \Rightarrow f_s = 948 \text{ Hz}$$

$$H = \frac{A}{2\pi} \Omega_s = \frac{50 \text{ eVs}}{2\pi} \cdot 6000 \frac{1}{\text{s}} = 47 \text{ keV}$$

$$\Delta\phi_{\max} = \frac{2H}{b} = 1,8 \text{ rad} \Rightarrow l_{\text{Bunch}} = 31 \text{ m}$$

$$w_{\max} = 8,6 \text{ eVs}$$



# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

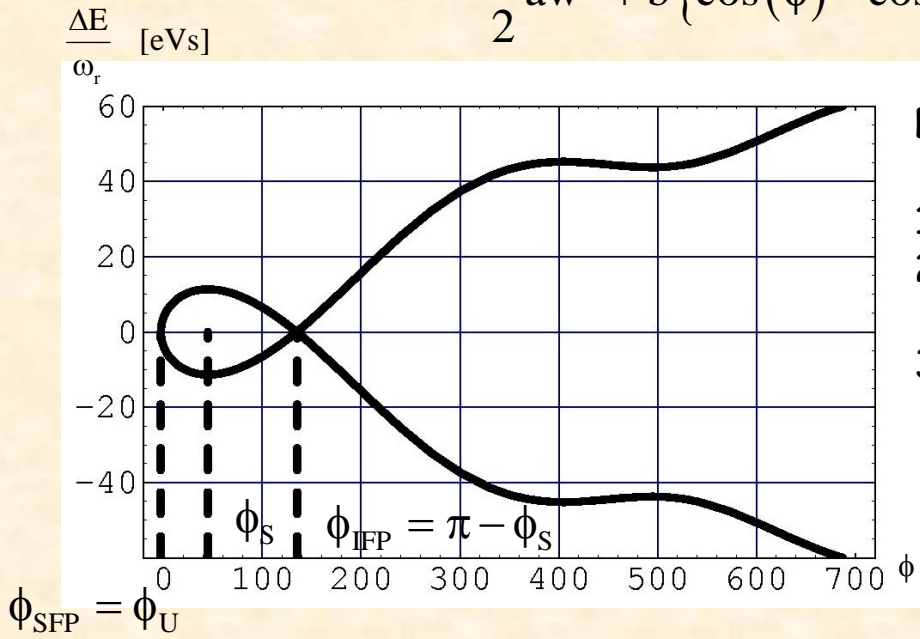
### 8.10.12 Das beschleunigende Bucket



Untenstehende Hamilton-Funktion ist wieder unser Startpunkt. Wir wollen nun ausrechnen, für eine gegebene Phasenraumfläche bei Injektion, welchen Phasenwinkel  $\Phi_S$  und welche HF-Spannung wir am Beginn der Beschleunigerrampe einstellen müssen.

$$H\left(\phi, \frac{\Delta E}{\omega_r}\right) = \frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{\beta^2 E} \left(\frac{\Delta E}{\omega_r}\right)^2 + \frac{q\hat{V}}{2\pi} \left\{ \cos(\phi) - \cos(\phi_S) + (\phi - \phi_S) \sin(\phi_S) \right\}$$

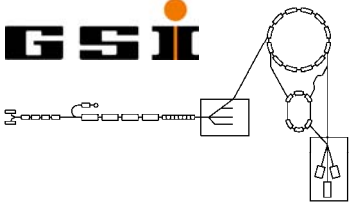
$$= \frac{1}{2} a\omega^2 + b \left\{ \cos(\phi) - \cos(\phi_S) + (\phi - \phi_S) \sin(\phi_S) \right\}$$



Die Separatrix ist durch drei Winkel gekennzeichnet:

- 1)  $\Phi_{IFP} = \pi - \Phi_S$ , der instabile Fixpunkt
- 2)  $\Phi_{SFP} = \Phi_U$ , der stabile Fixpunkt auf der linken Seite
- 3)  $\Phi_S$ , die tiefste Stelle des Buckets, also die Sollphase

$$\phi_{IFP} = \pi - \phi_S, \quad \phi_{SFP} = \phi_U$$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.12 Das beschleunigende Bucket



Da an den Fixpunkten immer  $w=0$  ist, kann man den Wert für den instabilen Fixpunkt in die Hamilton-Funktion einsetzen und man erhält den Wert der Hamilton-Funktion auf der gesamten Separatrix:

$$\phi_{\text{IFP}} = \pi - \phi_S$$

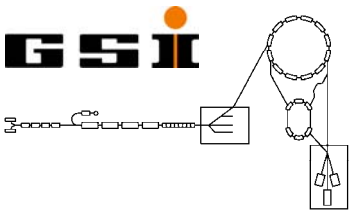
$$H_{Sx} = \frac{q\hat{V}}{2\pi} \left\{ -2\cos(\phi_S) + (\pi - 2\phi_S)\sin(\phi_S) \right\}$$

Nun hat man schon mal den Kurvenverlauf  $w(\Phi, \Phi_S)$  der Separatrix im Phasenraum, auch wenn man die Sollphase  $\Phi_S$  noch nicht kennt:

$$w = \sqrt{2\frac{b}{a} \sqrt{\cos(\phi) + \cos(\phi_S) + (\phi + \phi_S - \pi)\sin(\phi_S)}} = \frac{A_{SB}}{8\sqrt{2}} \sqrt{\cos(\phi) + \cos(\phi_S) + (\phi + \phi_S - \pi)\sin(\phi_S)}$$

Hierbei ist nun  $A_{SB}$  die Phasenraumfläche des stationären Buckets, d.h. das ist das Bucket mit der größten Fläche. Die Phasenraumfläche des beschleunigenden Buckets läßt sich in gewohnter Weise ausrechnen, indem man vom stabilen- bis zum instabilen Fixpunkt integriert:

$$A_{BB} = 2 \int_{\phi_U}^{\pi - \phi_S} w(\phi) d\phi = \frac{A_{SB}}{4\sqrt{2}} \int_{\phi_U}^{\pi - \phi_S} \sqrt{\cos(\phi) + \cos(\phi_S) + (\phi + \phi_S - \pi)\sin(\phi_S)} d\phi = \frac{A_{SB}}{4\sqrt{2}} \alpha(\phi_S)$$

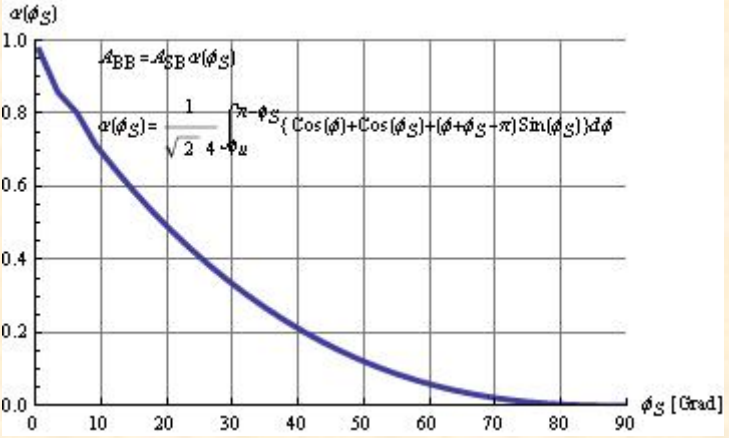


# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

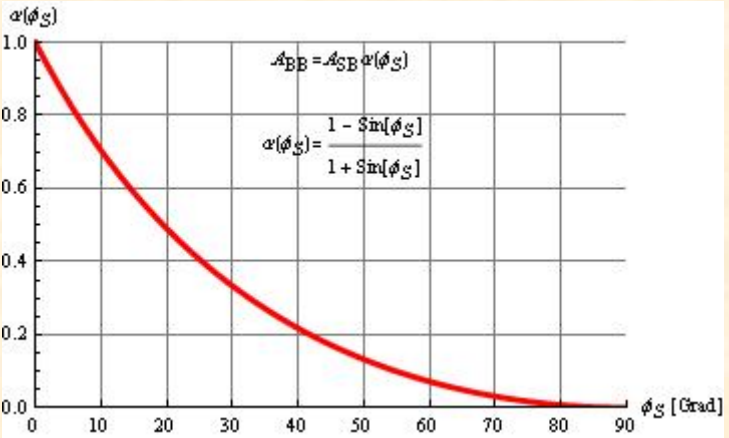
### 8.10.13 Näherungsweise Berechnung des beschleunigenden Buckets

Die Bucketfläche ist also bei  $\Phi_S=0$  am größten und ist bei  $90^\circ$  Null. Die Funktion  $\alpha(\Phi_S)$  wird Bucket-Reduktionsfaktor genannt. Der Funktionsverlauf  $A_{BB}(\Phi_S)$  ist im Diagramm dargestellt.

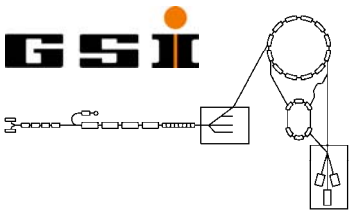


$$A_{BB} = 2 \int_{\phi_U}^{\pi - \phi_S} w(\phi) d\phi = \frac{A_{SB}}{4\sqrt{2}} \alpha(\phi_S)$$

Für die praktisch relevanten Sollphasen-Winkel kann man obige Funktion sehr genau mit folgender Funktion annähern:



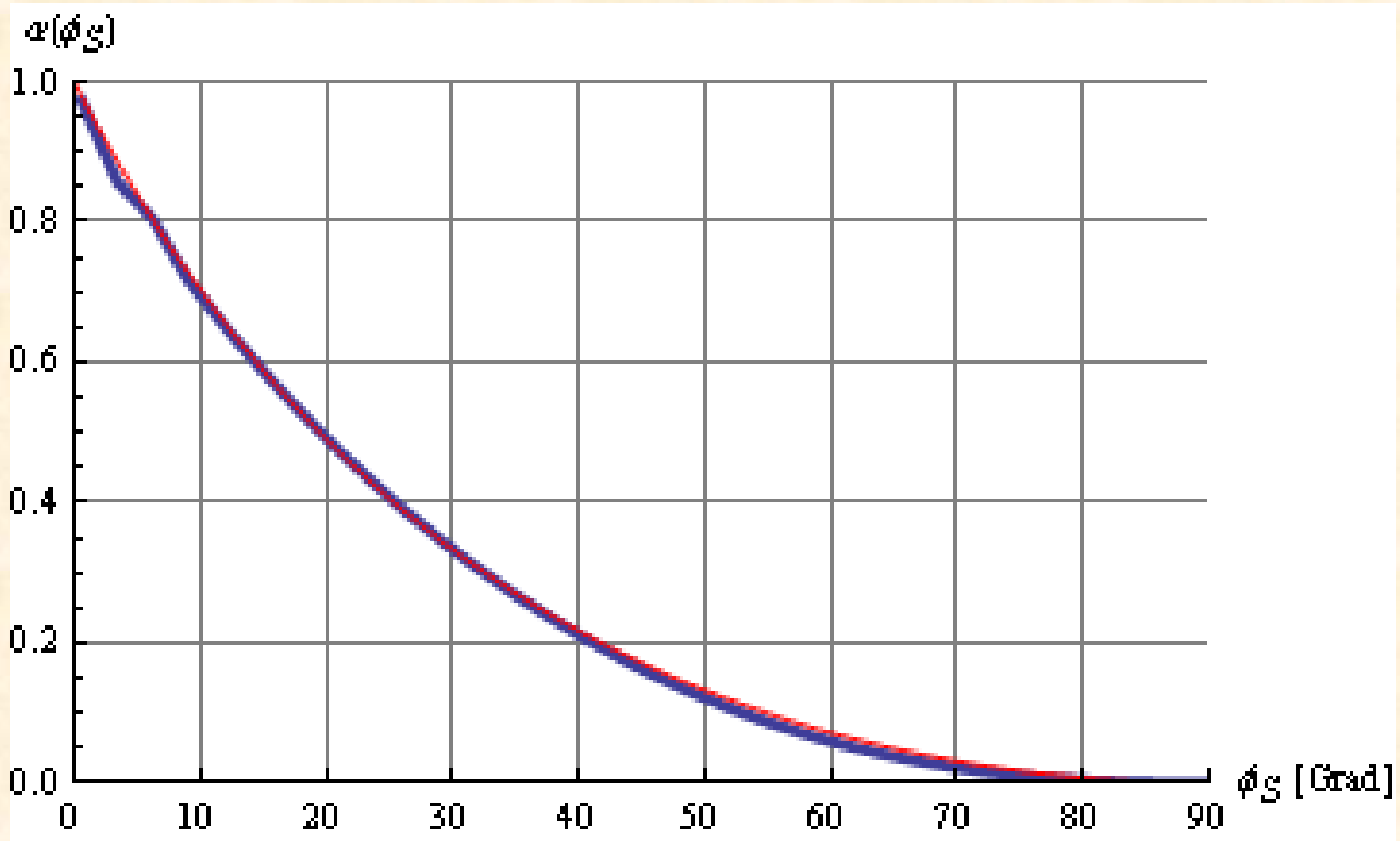
$$A_{BB} = A_{SB} \frac{1 - \sin(\phi_S)}{1 + \sin(\phi_S)}$$



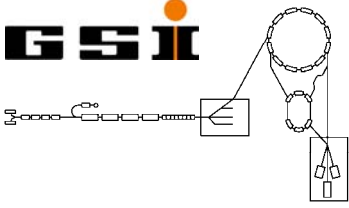
# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

### 8.10.13 Näherungsweise Berechnung des beschleunigenden Buckets







## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.13 Näherungsweise Berechnung des beschleunigenden Buckets

Nun erinnern wir uns vielleicht an die für das synchrone Teilchen nötige Mindestspannung  $V_{\min}$ :

$$V_{\min} = \hat{V} \sin(\phi_s) = L\rho \dot{B} = 216,72 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} \cdot 10 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} = 21,672 \text{ kV}$$

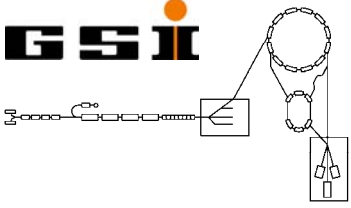
Hier können wir die unbekannte Spannungsamplitude durch  $\hat{V} = \frac{V_{\min}}{\sin(\phi_s)} = \frac{21,672 \text{ kV}}{\sin(\phi_s)}$  ersetzen.

$$A_{\text{BB}} = 16 \sqrt{\frac{q\hat{V}}{2\pi} \frac{\beta^2 E}{h\omega_r^2 \eta} \frac{1 - \sin(\phi_s)}{1 + \sin(\phi_s)}} = 16 \sqrt{\frac{q}{2\pi} \frac{\beta^2 E}{h\omega_r^2 \eta} \sqrt{\frac{V_{\min}}{\sin(\phi_s)} \frac{1 - \sin(\phi_s)}{1 + \sin(\phi_s)}}}$$

$$= 16 \sqrt{\frac{qV_{\min}}{2\pi} \frac{\beta^2 E}{h\omega_r^2 \eta} \sqrt{\frac{1}{\sin(\phi_s)} \frac{\frac{1}{\sin(\phi_s)} - 1}{\frac{1}{\sin(\phi_s)} + 1}}} = 16 \sqrt{\frac{qV_{\min}}{2\pi} \frac{\beta^2 E}{h\omega_r^2 \eta} \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}}$$

Wir müssen also nur noch eine kubische Gleichung lösen, um den unbekannt Winkel zu erhalten:

$$x^3 - x - \frac{A_{\text{BB}}}{A_{\text{SB}}^{\min}} (x^2 + 1) = 0$$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.13 Näherungsweise Berechnung des beschleunigenden Buckets

$$x^3 - x - \frac{A_{BB}}{A_{SB}^{\min}} (x^2 + 1) = 0$$

Zunächst berechnen wir mit Hilfe der bekannten Zahlen aus der letzten Vorlesung die Größe des stationären Buckets bei Minimal-Spannung von 21,672 kV:

$$A_{SB}^{\min} = 16 \sqrt{\frac{q \hat{V}_{\min}}{2\pi} \frac{\beta^2 E}{h\omega_r^2 \eta}} = 140 \text{ eVs}$$

Wollen wir, daß das beschleunigende Bucket nur zu 2/3 gefüllt ist, dann muß das beschleunigende Bucket die Aufnahmefähigkeit von 75 eVs:

$$A_{BB} = \frac{3}{2} \cdot 50 \text{ eVs} = 75 \text{ eVs}$$

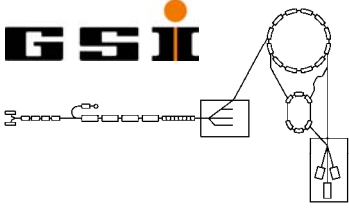
Die Koeffizienten der kubischen Gleichung sind damit bekannt und wir haben zu lösen:

$$x^3 - x - \frac{75}{140} (x^2 + 1) = 0$$

Nur die eine von drei Nullstellen ist reell:

$$\phi_s = 27,4^\circ$$

$$\hat{V} = \frac{V_{\min}}{\sin(\phi_s)} = 47 \text{ kV}$$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.14 Energieabhängigkeit, longitudinale Emittanz

Während der Beschleunigung ändert sich die Sollenergie  $E$  und  $\eta$  langsam (eventuell auch die Beschleunigungsspannung  $V$ ). Bei hinreichend langsamer Änderung (adiabatischer Änderung) solcher Parameter bleibt das Wirkungsintegral konstant.

$$I = \oint p dq = \oint w d\phi = \text{const} \quad (\text{Die Integration erfolgt über eine Synchrotron-Schwingung})$$

$$H(\Delta\phi, w) = -\frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{E\beta^2} w^2 - \frac{1}{2} \frac{e\hat{V}}{2\pi} \cos(\phi_s) \Delta\phi^2 = -\frac{1}{2} a w^2 - \frac{1}{2} b \Delta\phi^2$$

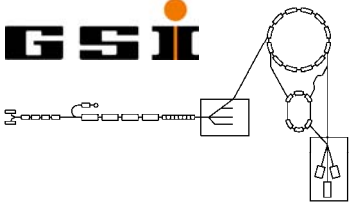
$$\Delta\phi_{\max} = \sqrt{\frac{2(-H)}{b}}$$

$$\Delta\phi(t) = \Delta\phi_{\max} \cos(\Omega_S t) = \sqrt{\frac{2(-H)}{b}} \cos(\Omega_S t)$$

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2(-H)}{a}}$$

$$w(t) = w_{\max} \sin(\Omega_S t) = \sqrt{\frac{2(-H)}{a}} \sin(\Omega_S t)$$

$$I = \oint p dq = \oint w \frac{d(\Delta\phi)}{dt} dt = \Delta\phi_{\max} w_{\max} \Omega_S \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_S}} \sin^2(\Omega_S t) dt = \Delta\phi_{\max} w_{\max} \Omega_S \left( \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\Omega_S} \right)$$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.14 Energieabhängigkeit, longitudinale Emittanz

Daraus folgt, das Produkt  $\Delta\Phi_{\max} w_{\max}$  bleibt bei adiabatischer Energieerhöhung konstant. Auch die Fläche der Ellipse im  $\{\Delta\Phi, w\}$ -Phasenraum bleibt während der Beschleunigung konstant.

Die Form der Ellipse ändert sich jedoch mit wachsender Energie des synchronen Teilchens.

$$\text{Aus } \frac{d\Delta\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w} \text{ folgt } \Delta\phi_{\max} \Omega_S \sin(\Omega_S t) = \frac{h\omega_r^2 \eta}{\beta^2 E} w_{\max} \sin(\Omega_S t)$$

$$\text{oder anders ausgedrückt } \Delta\phi_{\max} \Omega_S = \frac{h\omega_r^2 \eta}{\beta^2 E} w_{\max}$$

$$\text{Daraus erhält man } w_{\max} \Delta\phi_{\max} = \text{const} = \dots E \Omega_S (\Delta\phi_{\max})^2$$

Setzt man hier die Frequenz der Synchrotronschwingung ein, so ergibt sich:

$$w_{\max} \Delta\phi_{\max} = \text{const} = \dots E \sqrt{\frac{q\hat{V}}{2\pi} \frac{h\omega_r^2 \eta}{\beta^2 E}} (\Delta\phi_{\max})^2$$

$$\text{Daraus ergibt sich unmittelbar } \Delta\phi_{\max} \sim \frac{1}{E^{\frac{1}{4}}} \quad \text{und somit auch } w_{\max} \sim E^{\frac{1}{4}}$$