

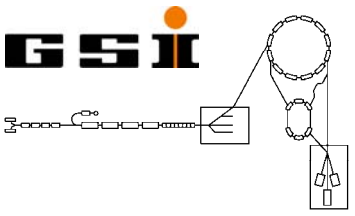
# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

Vorlesungsfolien 08.06.2012

## Inhalt

### 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

- 8.1 Beschleunigung
- 8.2. Die GSI-Beschleunigeranlagen
- 8.3. Mit welchen Frequenzen hat man es zu tun?
- 8.4. Die SIS18-Beschleunigerkavität
- 8.5. Die Darstellung des elektrischen Feldes im Spalt
- 8.6. Momentum Compaction
- 8.7. Was ist Dispersion?
- 8.8. Stabilität
- 8.9. Das synchrone Teilchen
- 8.10. Das unsynchrone Teilchen
  - 8.10.1 HF-Phasendifferenz und Impulsunschärfe
  - 8.10.2 Die longitudinale Hamilton-Funktion
  - 8.10.3 Die Potential-Funktion
  - 8.10.4 Das Bucket
  - 8.10.5 Hamilton-Funktion für kleine  $\Delta\Phi$
  - 8.10.6 Ellipsen-Näherung
  - 8.10.7 Bewegung der Teilchen im Phasenraum
  - 8.10.8 Das stationäre Bucket
  - 8.10.9 Strahleinfang mit stationärem Bucket
  - 8.10.10 Welche Spannung braucht man? (Beispiel)
  - 8.10.11 Wie lang ist der Bunch im Ring? (Beispiel)
  - 8.10.12 Das beschleunigende Bucket
  - 8.10.13 Näherungsweise Behandlung des beschleunigenden Buckets
  - 8.10.14 Energieabhängigkeit, longitudinale Emittanz



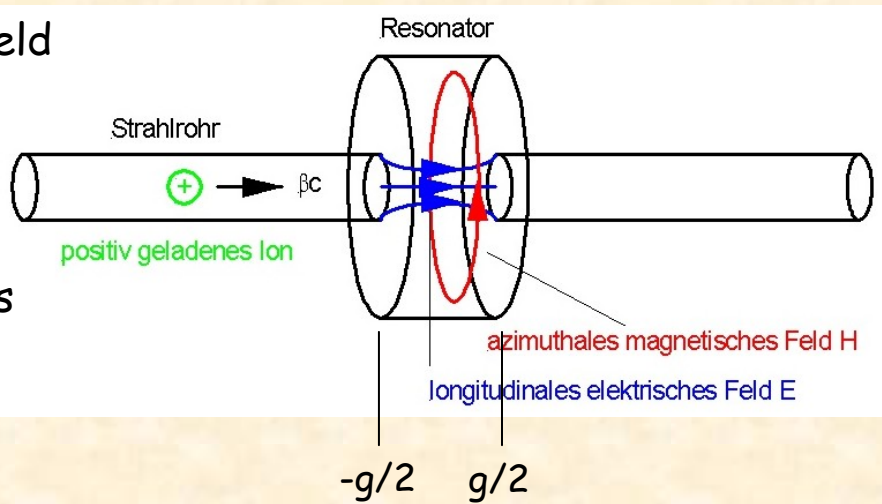
# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.1. Beschleunigung

In der Beschleunigungsstrecke, hier ist es ein "Zylinderresonator" (TM<sub>010</sub>-Mode), haben wir eine sinusförmige Beschleunigungsspannung:

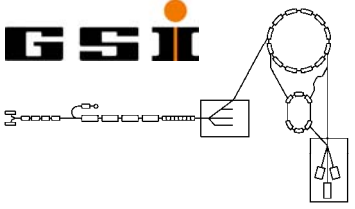
$$V(t) = \hat{V}_0 e^{i(\omega_{HF}t + \psi_0)}$$

- $\omega_{HF}$  = HF-Frequenz der Kavität
- $\psi_0$  = Eintrittsphase des Teilchens in das Feld
- $V_0$  = Amplitude der Gapspannung
- $g$  = Länge der Kavität bzw. des Spalts
- $v$  = Teilchengeschwindigkeit
- $\Lambda$  = Transit-Time-Faktor
- $\delta W$  = Energiezuwachs bei Durchquerung des Spalts



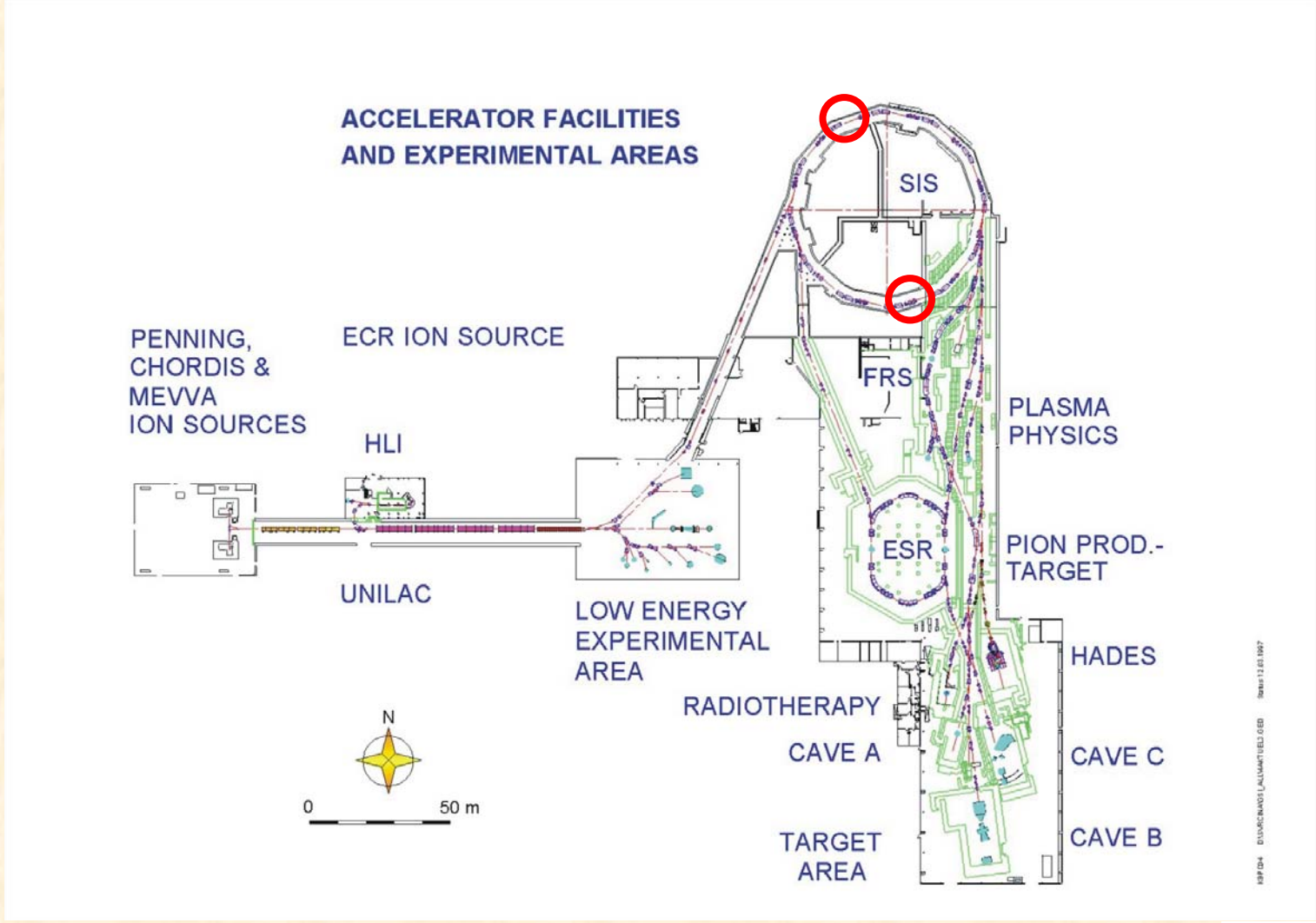
Der Energiezuwachs bei Durchquerung der Kavität ist:

$$\delta W = q\hat{V}_0 e^{i\psi_0} \int_{-g/2}^{g/2} e^{i\omega_{HF}t} ds = q\hat{V}_0 e^{i\psi_0} \int_{-g/2}^{g/2} e^{i\frac{\omega_{HF}}{v}s} ds = q\hat{V}_0 e^{i\psi_0} \frac{\text{Sin}\left(\frac{\omega_{HF}}{v} \frac{g}{2}\right)}{\frac{\omega_{HF}}{v} \frac{g}{2}} g = q\hat{V}_0 e^{i\psi_0} \Lambda g$$

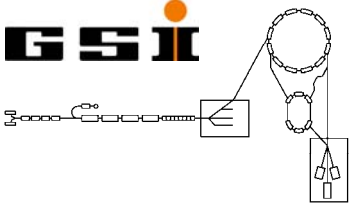


# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.2. Die GSI-Beschleunigeranlagen







## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.3. Mit welchen Frequenzen hat man es zu tun?

Nach dem Einschub aus dem UNILAC laufen im SIS18  $U^{28+}$ -Ionen mit 11,4 MeV/u um:

$$\gamma = 1 + \frac{11,4 \text{ MeV / u}}{931 \text{ MeV / u}} = 1,012 \quad \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = 0,16 \quad f_r = \frac{c_0 \beta}{L} = 221 \text{ kHz}$$

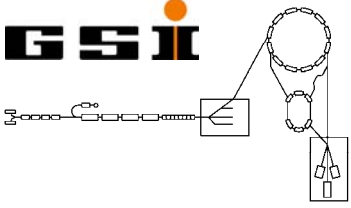
Nach dem Beschleunigungsvorgang haben die  $U^{28+}$ -Ionen 200 MeV/u:

$$\gamma = 1 + \frac{200 \text{ MeV / u}}{931 \text{ MeV / u}} = 1,22 \quad \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = 0,57 \quad f_r = \frac{c_0 \beta}{L} = 786 \text{ kHz}$$

Das bedeutet, die HF-Frequenz der Beschleunigeranlage ist sehr niedrig und irgendwo im Bereich einige hundert kHz bis einige MHz.

Frage Nr. 1: Ist die Realisierung einer Hochfrequenz-Beschleunigeranlage in diesem Frequenzbereich sehr einfach oder sehr schwer?

Frage Nr. 2: Was ist eine gute Beschleuniger-Kavität für diesen Zweck?



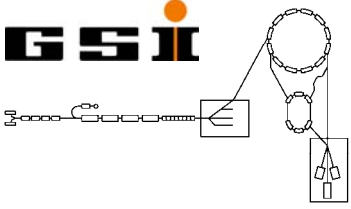
# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.4. Die SIS18-Beschleunigerkavität

(Wird Gegenstand der Vorlesung vom 17.06.2011)

### SIS18-Ferrit-Kavität (0.8 MHz-5.4 MHz, 16 kV)



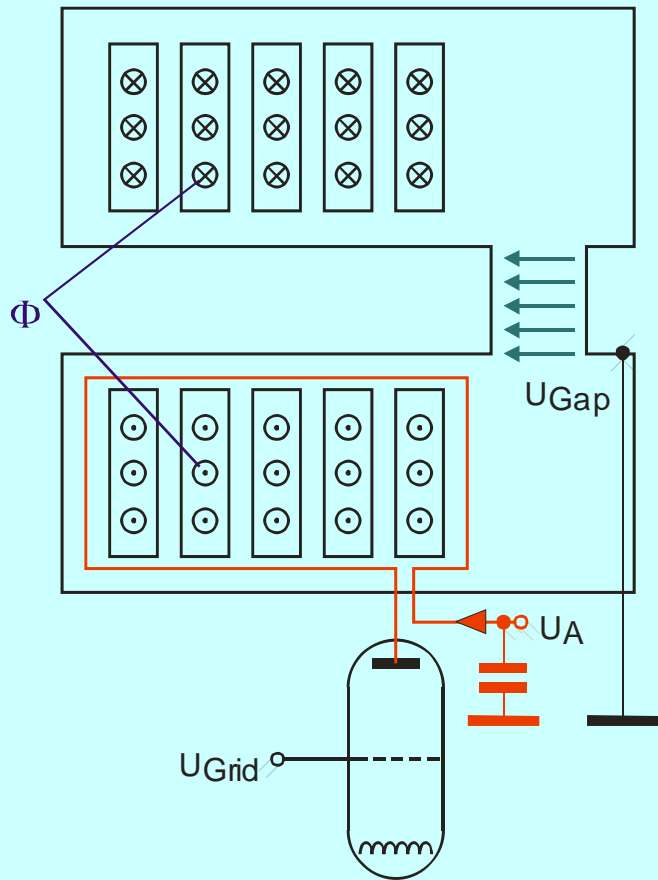


# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.4. Die SIS18-Beschleunigerkavität

(Wird Gegenstand der Vorlesung vom 17.06.2011)

### •Prinzip der Ferrit-Kavitäten SIS18



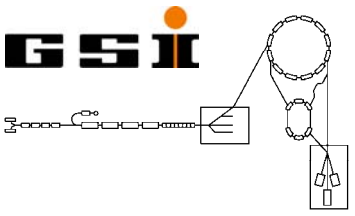
- Ferritringe bestimmen die Induktivität
- Induktivität läßt sich durch Vormagnetisierungsstrom verändern
- Gesamtkapazität wird durch zusätzliche Gap-Kondensatoren erhöht
- Resonanzfrequenz wird durch Vormagnetisierungsstrom bestimmt.
- Kühlscheiben zwischen den Ferritringen

$$L_0 = l \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_a}{d_i}$$

$$L = L_0 \cdot \mu_r$$

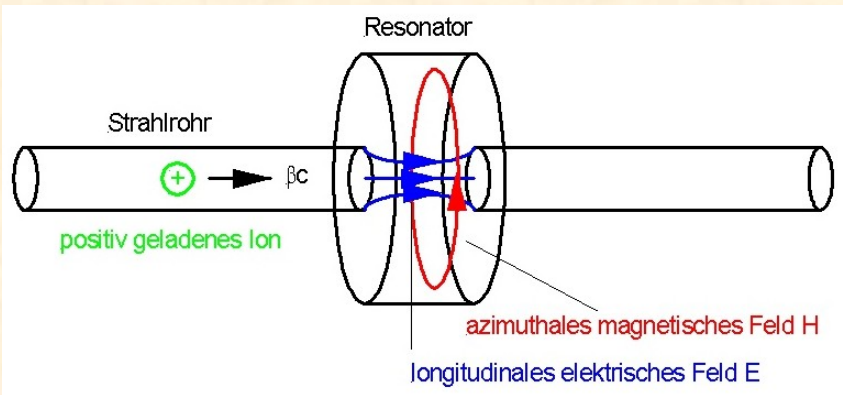
$$l = n \cdot d$$





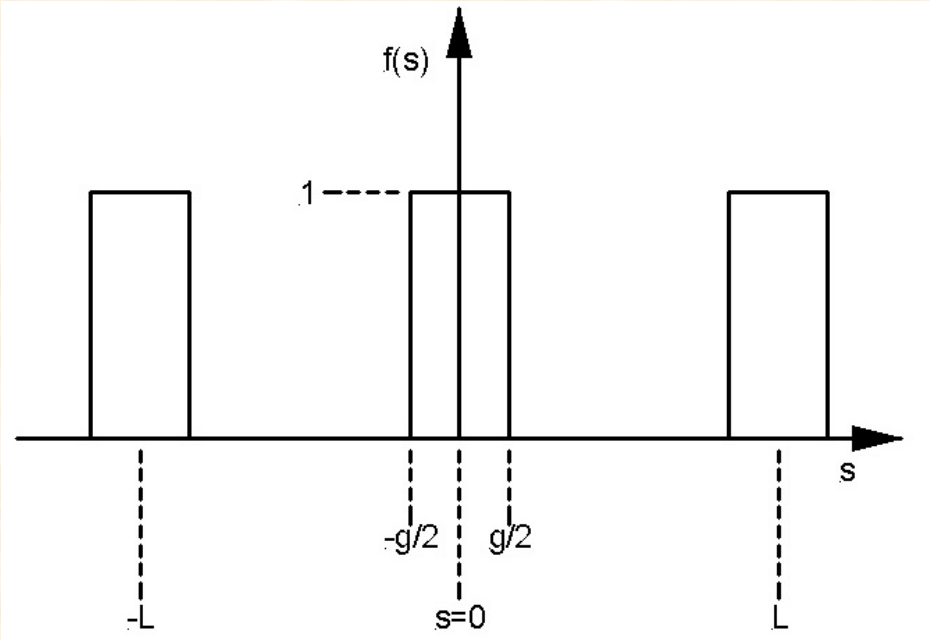
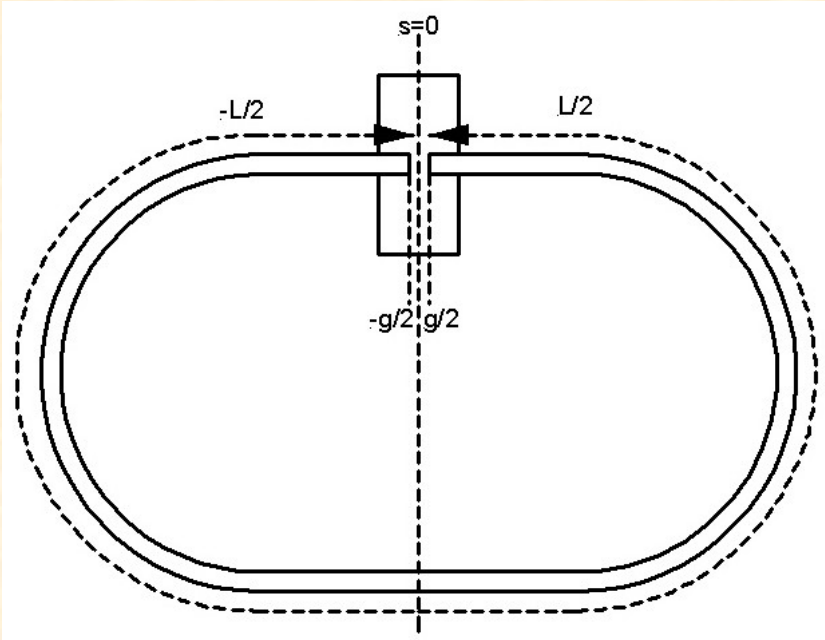
# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

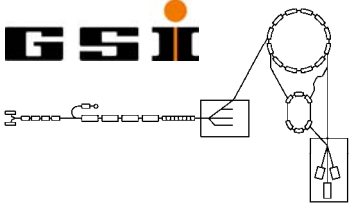
## 8.5. Die Darstellung des elektrischen Feldes im Spalt



$$V(s, t) = f(s) V_s(t)$$

$$V_s(t) = V_0 e^{i \left( \int_{t_0}^{t_1} \omega_{HF}(t) dt + \psi_0 \right)}$$





# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.5. Die Darstellung des elektrischen Feldes im Spalt

Das elektrische Feld im Spalt setzt sich zusammen aus dem Produkt eines rein örtlich- und eines rein zeitlich abhängigen Anteils:  $V(s,t) = f(s)V_S(t)$

Für den zeitlichen Anteil machen wir den Ansatz:

$$V_S(t) = \hat{V}_0 \cos\left(\int_{t_0}^{t_1} \omega_{\text{HF}}(t) dt + \psi_0\right)$$

Der örtliche Anteil ist einfach die Fourier-Entwicklung der Rechteck-Funktion:

$$f(s) = \frac{g}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(n \frac{2\pi g}{L} \frac{s}{2}\right)}{\left(n \frac{2\pi g}{L} \frac{s}{2}\right)} e^{i\left(n \frac{2\pi}{L} s\right)}$$

Der vom Teilchen zurückgelegte Weg und die HF-Frequenz sind gegeben durch:

$$s(t_1) = s_0 + \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \quad \omega_{\text{HF}}(t) = h\omega_r(t) = h \frac{2\pi v(t)}{L}$$

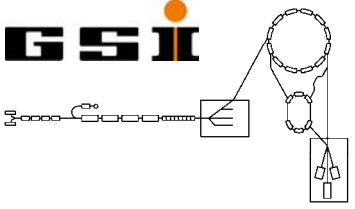
Interessant ist es, den Energiegewinn  $W$  des Teilchens pro Umlauf zu berechnen

$$\delta W = q\hat{V}_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\left(n \frac{2\pi}{L} s\right)} \right\} \frac{1}{2} \left\{ e^{i\left(h \frac{2\pi}{L} s + \psi_0\right)} + e^{-i\left(h \frac{2\pi}{L} s + \psi_0\right)} \right\} ds = q\hat{V}_0 \frac{g}{L} \frac{\sin\left(h \frac{2\pi g}{L} \frac{s}{2}\right)}{h \frac{2\pi g}{L} \frac{s}{2}} \cos(\psi_0) L = q\hat{V}_0 \Lambda \cos(\psi_0) g$$

Nur die harmonische  $h$  spielt eine Rolle; alle anderen Anteile haben keine Wirkung:

$$\delta W = q\hat{V}_0 \frac{\sin\left(h \frac{2\pi g}{L} \frac{s}{2}\right)}{\left(h \frac{2\pi g}{L} \frac{s}{2}\right)} \cos(\psi_0) g \rightarrow q\hat{V}_0 \cos(\psi_0) g \quad \text{für } g \rightarrow 0.$$





# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.5. Die Darstellung des elektrischen Feldes im Spalt

Da nur die eine Harmonische  $h$  der Fourier-Entwicklung effektiv beiträgt, kann man für das elektrische Feld im Spalt auch schreiben:

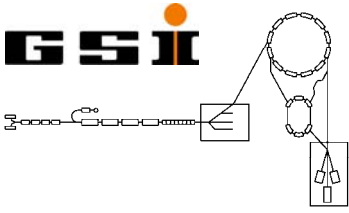
$$V(s, t) = \hat{V}_0 2 \frac{g}{L} \frac{\sin\left(h \frac{2\pi g}{L 2}\right)}{h \frac{2\pi g}{L 2}} \cos\left(h \frac{2\pi}{L} s\right) \sin\left(\int_{t_0}^{t_1} \omega_{HF} dt + \psi_0\right) = \hat{V}_0 A_h \cos\left(h \frac{2\pi}{L} s\right) \sin\left(\int_{t_0}^{t_1} \omega_{HF} dt + \psi_0\right)$$

Das lässt sich mit Hilfe der Additionstheoreme auch in der folgenden Form ausdrücken:

$$V(s, t) = \frac{\hat{V}_0}{2} A_h \left\{ \sin\left(\int_{t_0}^t \omega_{HF} dt + \psi_0 + h \frac{2\pi}{L} s\right) + \sin\left(\int_{t_0}^t \omega_{HF} dt + \psi_0 - h \frac{2\pi}{L} s\right) \right\}$$

Das Feld ist nun aufgeteilt in eine rechts- und eine linkslaufende Welle, deren Phasengeschwindigkeit gleich der Teilchengeschwindigkeit ist. Die linkslaufende Welle jedoch läuft dem Teilchen entgegen und hinterlässt im zeitlichen Mittel keinerlei Wirkung.

$$\int_{t_0}^t \omega_{HF} dt' + \psi_0 - h \frac{2\pi}{L} s = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \omega_{HF} - h \frac{2\pi}{L} v_{ph} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{ph} = \frac{\omega_{HF}}{h \frac{2\pi}{L}} = v$$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.6. Momentum Compaction

Eine wichtige Sache bei Kreisbeschleunigern ist die Änderung der Umlauffrequenz bei einer Änderung des Impulses. Die Umlauffrequenz ist durch die Teilchengeschwindigkeit und die Bahnlänge bestimmt

$$f_r = \frac{c_0 \beta}{L}$$

Die Änderung der Umlauffrequenz ist also  $df_r = c_0 \frac{d\beta L - \beta dL}{L^2}$ , oder  $\frac{df_r}{f_r} = \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dL}{L}$

Aus  $p = m_0 \gamma c_0 \beta$  leitet man ab  $\frac{d\beta}{\beta} = (1 - \beta^2) \frac{dp}{p}$

Dann kann man schon die linke Seite durch die Impulsänderung ausdrücken:

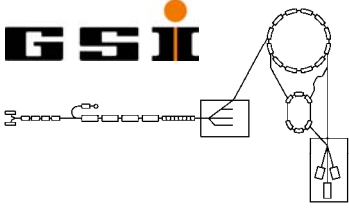
$$\frac{df_r}{f_r} = (1 - \beta^2) \frac{dp}{p} - \frac{dL}{L} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} - \frac{dL}{L}$$

Für die rechte Seite benutzen wir den sogenannten „Momentum-Compaction-Factor“, der folgendermaßen definiert ist:

$$\frac{\Delta L}{L_s} = \frac{L - L_s}{L_s} = \alpha \frac{\Delta p}{p_s}$$

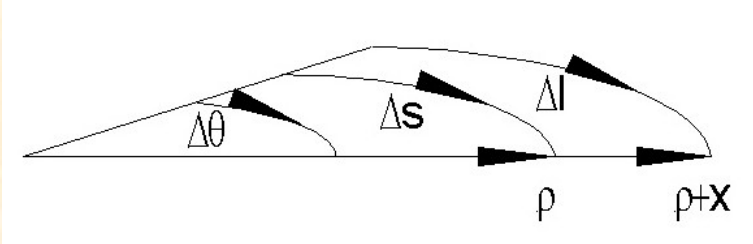
Daraus folgt

$$\frac{df_r}{f_r} = \left( \frac{1}{\gamma^2} - \alpha \right) \frac{dp}{p} = \eta \frac{dp}{p}$$



# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.7. Was ist Dispersion?



$$d\theta = \frac{dl}{\rho + x} = \frac{ds}{\rho}$$

$$dl = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) ds$$

Integriert über einen vollständigen Umlauf erhalten wir die Bahnlänge der gestörten Bahn:

$$L = \oint dl = \oint \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) ds = L_s + \oint \frac{x}{\rho} ds$$

Wir betrachten die Bewegungsgleichung für  $x(s)$ :

$$x''(s) + K(s)x(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p}$$

$$x(s) = x_h(s) + x_i(s)$$

$$x_i(s) = D(s) \frac{\Delta p}{p}$$

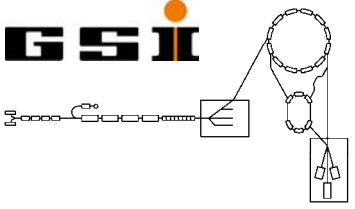
$D(s)$  ist die Dispersion-Trajektorie, definiert als die spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$D''(s) + K(s)D(s) = \frac{1}{\rho(s)}$$

$$\frac{\Delta L}{L_s} = \frac{L - L_s}{L_s} = \frac{1}{L_s} \frac{\Delta p}{p_s} \oint \frac{D}{\rho} ds = \alpha \frac{\Delta p}{p_s} \Rightarrow$$

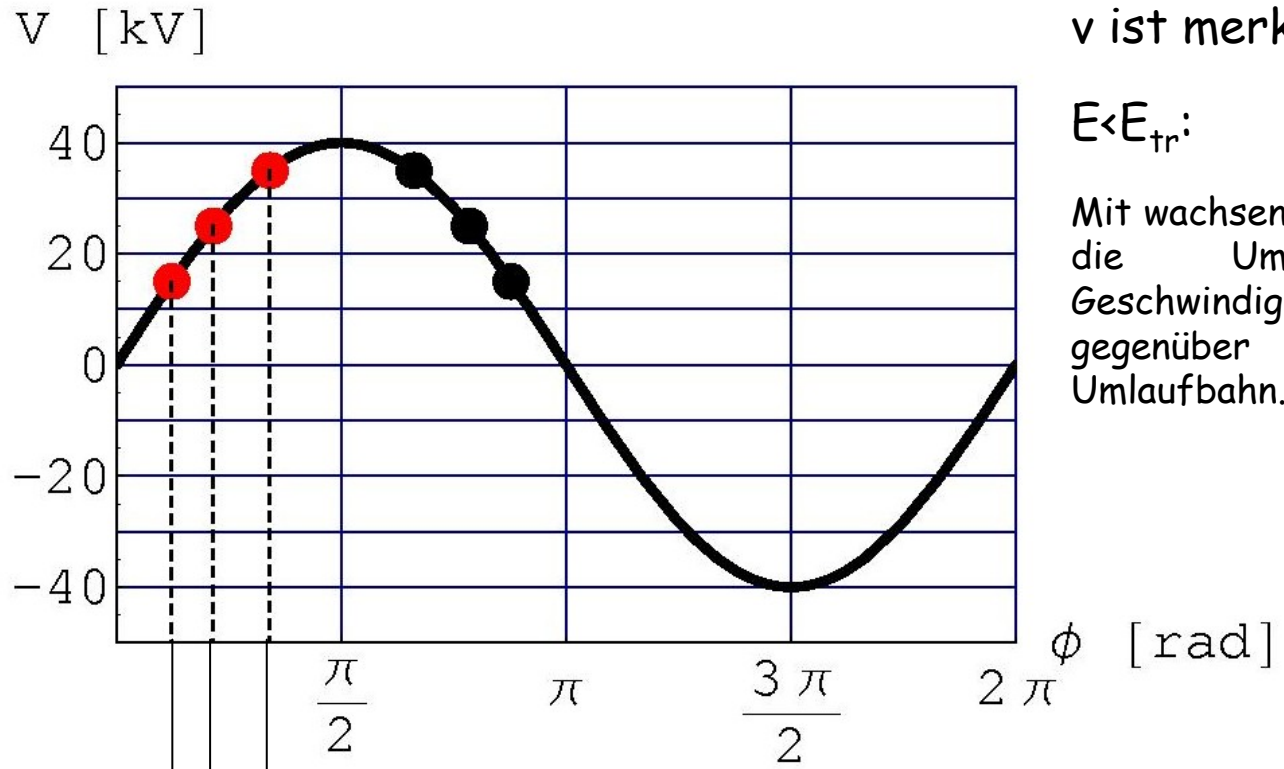
$$\alpha = \frac{1}{L_s} \oint \frac{D}{\rho} ds$$





# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.8. Stabilität



$p_1$     $p_s$     $p_2$

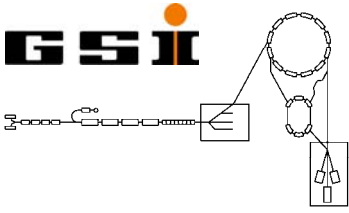
$$\Delta p_1 = p_1 - p_s > 0 \Rightarrow \tau_1 < \tau_s$$

$$\Delta p_2 = p_2 - p_s < 0 \Rightarrow \tau_2 < \tau_s$$

$v$  ist merklich kleiner als  $c_0$

$$E < E_{tr}$$

Mit wachsender Energie reduziert sich die Umlaufzeit, da der Geschwindigkeitszuwachs dominiert gegenüber der Verlängerung der Umlaufbahn.



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.9. Das synchrone Teilchen

Das Teilchen mit dem Impuls  $p$  und der Ladung  $e$  wird im lokalen B-Feld auf eine Kreisbahn mit dem Radius  $\rho$  gezwungen:

$$p = eR \langle B \rangle = e\rho B$$

Ändert sich nun der Impuls zeitlich durch die Beschleunigung, so muß sich, da das Teilchen auf der gleichen Bahn gehalten werden soll, auch das B-Feld zeitlich:

$$\frac{dp}{dt} = eR \frac{d\langle B \rangle}{dt} = eR \langle \dot{B} \rangle$$

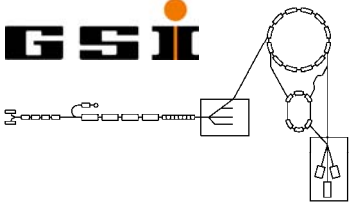
Der Impulsgewinn pro Umdrehung ist für das synchrone Teilchen:

$$\Delta p / \text{Umdrehung} = eR \langle \dot{B} \rangle \tau_r = eR \langle \dot{B} \rangle \frac{L}{c_0 \beta}$$

Aufgrund des Zusammenhangs  $E^2 = p^2 c_0^2 + m_0^2 c_0^4$  gilt auch  $\Delta E = c_0 \beta \Delta p$

Dadurch können wir den Impulsgewinn- in den Energiegewinn pro Umdrehung umrechnen:

$$\Delta E / \text{Umdrehung} = eR \langle \dot{B} \rangle L = eL\rho \dot{B}$$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.9. Das synchrone Teilchen

Auf der ersten Folie hatten wir den Energiegewinn bei Spaltdurchquerung hingeschrieben:

$$\Delta E / \text{Umdrehung} = e \hat{V} \sin(\phi_s)$$

Auf der letzten Folie hatten wir die Energieerhöhung mit der notwendigen B-Felderhöhung in Zusammenhang gebracht:

$$\Delta E / \text{Umdrehung} = eR \langle \dot{B} \rangle L = eL\rho \dot{B}$$

Beides können wir natürlich gleichsetzen und erhalten den Zusammenhang:

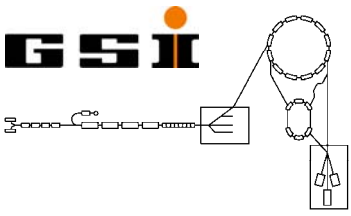
$$\hat{V} \sin(\phi_s) = L\rho \dot{B}$$

Was bedeutet das für das synchrone Teilchen im SIS18 ?

$$\hat{V} \sin(\phi_s) = 216,72 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} \cdot 10 \text{ T/s} = 22 \text{ kV}$$

Wollen wir stabil beschleunigen, so muss der synchrone Phasenwinkel etwa  $42^\circ$  betragen. Dann muss aber die Spannung allein für das synchrone Teilchen etwa 32 kV groß sein.





# 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

## 8.10. Das unsynchrone Teilchen

### 8.10.1 HF-Phasendifferenz und Impulsunschärfe

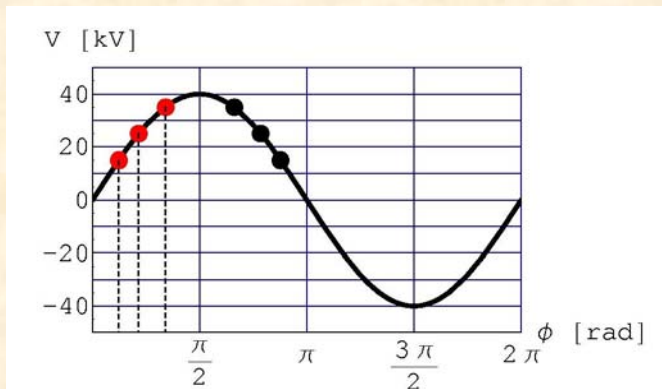
Der azimuthale Winkel  $\theta$  hängt mit der azimuthalen Position  $s$  im Synchrotronring zusammen über:

$$\Delta s = R \Delta \theta$$

Über eine Umdrehung variiert dieser Winkel um  $2\pi$  während die HF-Phase  $\phi$  um  $h2\pi$  variiert. Also hat man folgenden Zusammenhang:

$$\Delta \phi = -h \Delta \theta$$

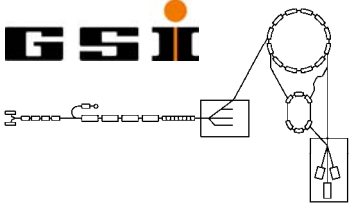
Das negative Vorzeichen kommt daher, daß ein Teilchen hinter dem synchronen Teilchen ( $\Delta \theta < 0$ ) zeitlich später im Gap ankommt ( $\Delta t > 0$  oder  $\Delta \phi > 0$ ). Dann können wir jetzt schreiben:



$$\frac{d}{dt} \Delta \theta = \Delta \omega_r = -\frac{1}{h} \frac{d}{dt} \Delta \phi = \frac{\Delta \omega_r}{\omega_r} \omega_r = \omega_r \eta \frac{\Delta p}{p}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta \phi = -h \omega_r \eta \frac{\Delta p}{p} = -\frac{h \omega_r^2 \eta}{E \beta^2} \left( \frac{\Delta E}{\omega_r} \right)$$

Das hinter dem synchronen Teilchen herlaufende Teilchen kommt bei einer größeren Gapphase an ( $\phi = \omega_{HF} t$ )



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.1 HF-Phasendifferenz und Impulsunschärfe

Wir starten mit der bekannten Gleichung des Energiegewinns pro Umdrehung durch das HF-Feld:

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{\beta c_0} = \frac{e \hat{V}}{\beta c_0} \sin(\phi) = \frac{e \hat{V}}{R \omega_r} \sin(\phi)$$

Indem wir den Impulsgewinn durch die Umdrehungszeit teilen, ergibt sich die Änderungsrate pro Sekunde zu:

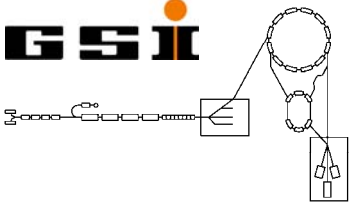
$$\dot{p} = \frac{\Delta p}{\tau_r} = \frac{\omega_r}{2\pi} \frac{e \hat{V}}{R \omega_r} \sin(\phi) = \frac{e \hat{V}}{2\pi R} \sin(\phi)$$

Da sich nicht nur der Impuls, sondern auch der mittlere Radius der zurückgelegten, geschlossenen Bahn ändert, schreiben wir die sich ändernden Größen auf die linke Seite:

$$R \dot{p} = \frac{e \hat{V}}{2\pi} \sin(\phi)$$

Da wir uns für die Differenz zum synchronen Teilchen interessieren, müssen wir folgende Gleichung untersuchen:

$$R \dot{p} - R_s \dot{p}_s = \frac{e \hat{V}}{2\pi} \{ \sin(\phi) - \sin(\phi_s) \}$$



## 8. Longitudinale Strahldynamik ohne Raumladung

### 8.10. Das unsynchrone Teilchen

#### 8.10.1 HF-Phasendifferenz und Impulsunschärfe

Ausgangspunkt ist die Gleichung: 
$$R \dot{p} - R_s \dot{p}_s = \frac{e\hat{V}}{2\pi} \{ \sin(\phi) - \sin(\phi_s) \}$$

Die linke Seite der obigen Gleichung wird zur ersten Ordnung entwickelt:

$$R \dot{p} - R_s \dot{p}_s = (R_s + \Delta R)(\dot{p}_s + \Delta \dot{p}) - R_s \dot{p}_s \approx R_s \Delta \dot{p} + \Delta R \dot{p}_s$$

Schreibt man das etwas anders hin, so vereinfacht sich alles zu:

$$R_s \Delta \dot{p} + \Delta R \dot{p}_s = R_s \Delta \dot{p} + \left( \frac{dR}{dp} \right)_s \Delta p \dot{p}_s = R_s \Delta \dot{p} + \left( \frac{dR}{dt} \right)_s \Delta p = \frac{d}{dt} (R \Delta p)$$

Hier geht man besser von  $R \Delta p$  auf  $\Delta E / \omega_r$  über, da man zu diesen Größen einfach den besseren Zugang hat, denn die Umlaufkreisfrequenz ist messtechnisch zugänglich,  $R$  hingegen nicht:

$$\frac{d}{dt} (R \Delta p) = \frac{d}{dt} \left( R \frac{\Delta E}{\beta c_0} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega_r} \right)$$

Die zweite Bewegungsgleichung lautet also:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{\omega_r} \right) = \frac{e\hat{V}}{2\pi} \{ \sin(\phi) - \sin(\phi_s) \}$$