

# 13.) Konzepte zur Strahldynamik

## 13.1. *Transversale Strahldynamik*

Wie wir bisher gelernt haben gilt

$$\begin{pmatrix} x(s+L) \\ x'(s+L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s, s+L) & s(s, s+L) \\ c'(s, s+L) & s'(s, s+L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}(s, s+L) \vec{x}$$

Von speziellem Interesse ist die Transformation über einen Umlauf  $\underline{\underline{M}}(s) = \underline{\underline{A}}(s, s+C)$ , wobei C der Umfang des Ringes ist.

Aus der allgemeinen Lösung der **Hillschen Differentialgleichung** hatten wir

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \Delta\Psi + \alpha_0 \sin \Delta\Psi) & \sqrt{\beta \cdot \beta_0} \sin \Delta\Psi \\ \frac{(\alpha_0 - \alpha) \cos \Delta\Psi - (1 + \alpha_0 \alpha) \sin \Delta\Psi}{\sqrt{\beta \cdot \beta_0}} & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} (\cos \Delta\Psi - \alpha \sin \Delta\Psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s, s+L) & s(s, s+L) \\ c'(s, s+L) & s'(s, s+L) \end{pmatrix}$$

erhalten. Damit wird die Matrix M zu

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{M}}(s) &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\Psi + \alpha(s) \sin \Delta\Psi & \beta(s) \sin \Delta\Psi \\ \frac{(1 + \alpha^2(s)) \sin \Delta\Psi}{\beta(s)} & \cos \Delta\Psi - \alpha(s) \sin \Delta\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s, s + C) & s(s, s + C) \\ c'(s, s + C) & s'(s, s + C) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s) \sin \mu & \beta(s) \sin \mu \\ -\gamma(s) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s) \sin \mu \end{pmatrix} = \cos \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \mu \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \\
&= \cos \mu \underline{\mathbf{I}} + \sin \mu \underline{\mathbf{J}} \qquad (13.1)
\end{aligned}$$

Man nennt die Matrix  $\underline{\mathbf{M}}$  auch die Twiss-Matrix oder Eigenmatrix des Beschleunigers. Der Phasenvorschub nach einem Umlauf ist  $\mu$ .

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha^2 + \beta \cdot \gamma = 1, \quad \underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\underline{\mathbf{I}}, \quad \underline{\mathbf{J}}^{-1} = -\underline{\mathbf{J}}$$

Für N Umläufe gelten nun:

$$\underline{\mathbf{M}}^N = (\cos \mu \underline{\mathbf{I}} + \sin \mu \underline{\mathbf{J}})^N = \cos N\mu \underline{\mathbf{I}} + \sin N\mu \underline{\mathbf{J}}$$

Die Strahlen im Ring bleiben nun stabil, wenn  $\underline{\mathbf{M}}^N$  nicht divergiert. Daher muss  $\mu$  reell bleiben (sonst werden cos und sin zu cosh und sinh). Damit jedoch erhalten wir als Stabilitätsbedingung:

$$|\cos \mu| \leq 1 \Rightarrow |\text{Tr} \underline{\mathbf{M}}| = |\cos \mu + \alpha \sin \mu + \cos \mu - \alpha \sin \mu| = |2 \cos \mu| \leq 2$$

Damit muss der Phasenvorschub  $0 \leq \mu \leq \pi$  betragen. Damit können wir für die TWISS Parameter der Eigenellipse die Lösung angeben, welche in Vorlesung 5 aufgezeigt wurde:

$$Y_e = \begin{pmatrix} \beta_e \\ \alpha_e \\ \gamma_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{12}/\sin \sigma_0 \\ \frac{1}{2}(m_{11} - m_{22})/\sin \sigma_0 \\ -m_{21}/\sin \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \cos \sigma_0 = \frac{1}{2} \text{Tr} M, \quad 0 < \sigma_0 < \pi$$

Wobei  $\sigma_0 = \mu$  ist und  $\underline{\mathbf{M}}(s) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

Durch die optischen Funktionen (Twiss-Parameter in Abhängigkeit von s) wird eine Maschinenellipse

definiert:  $\beta(s)x'^2 + 2\alpha(s)xx' + \gamma(s)x^2 = \varepsilon \rightarrow$

$$(x, x') \begin{pmatrix} \gamma/\varepsilon & \alpha/\varepsilon \\ \alpha/\varepsilon & \beta/\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{x}^T \underline{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{x} = 1$$

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \varepsilon\beta & -\varepsilon\alpha \\ -\varepsilon\alpha & \varepsilon\gamma \end{pmatrix}, \quad \det S = \varepsilon^2$$

Dabei ist  $\underline{\mathbf{S}}$  die sogenannte Strahlmatrix.

Durch nachrechnen kann man leicht zeigen, dass sich die Strahlmatrix wie folgt transformiert:

$$\underline{S} = \underline{A} \cdot \underline{S}_0 \cdot \underline{A}^T \Rightarrow \underline{S}_e = \underline{M} \cdot \underline{S}_e \cdot \underline{M}^T \quad (13.2)$$

$$\rightarrow \underline{M} \cdot \underline{S}_e \cdot \underline{M}^T = (\cos \mu \underline{I} + \sin \mu \underline{J}) \cdot \underline{S}_e \cdot (\cos \mu \underline{I}^T + \sin \mu \underline{J}^T)$$

Mit  $\underline{I}^T = \underline{I}$  ,  $\underline{J}^T = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$

und weiteren Umformungen sieht man, dass die Matrix  $\underline{M}$  die Strahlmatrix  $\underline{S}_e$  nach einem Umlauf in sich selbst abbildet. Die Strahlmatrix hängt natürlich von dem Punkt  $s$  im Beschleuniger ab, von dem aus man den Umlauf startet.

### 13.2. Die periodische Dispersion

In linearer Näherung hatten wir die Bewegungsgleichungen der Teilchen im Ring wie folgt abgeleitet:

$$\begin{aligned} x'' + \left( k_m^2(s) + \frac{1}{\rho^2(s)} \right) x &= \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p_0} \\ y'' - k_m^2(s) y &= 0 \\ l' &= 1 + \frac{x}{\rho(s)} \end{aligned}$$

Man kann nun die beiden Gleichungen in Hillsche-DGLs umwandeln, indem man folgende Beziehungen nutzt:

$$k_x(s) = k_m^2(s) + \frac{1}{\rho^2(s)} \quad ; \quad k_y(s) = -k_m^2(s)$$

Bisher hatten wir keine Impulsabweichung der Teilchen angenommen, d.h.  $\Delta p = 0$ . Nun betrachten wir jedoch die DGL mit Impulsabweichung

$$x'' + k_x(s) = h(s) \cdot \delta \quad \text{mit} \quad h(s) = \frac{1}{\rho_0(s)} \quad ; \quad \delta = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (13.3)$$

Zur Lösung dieser DGL ist es notwendig, die aufgrund der Impulsabweichung  $\delta$  modifizierte Gleichgewichtsbahn  $x_D(s) = D(s) \cdot \delta$  zu finden. Dieses ist auch eine periodische Lösung und wird **periodische Dispersion** des Kreisbeschleunigers genannt. Die Lösung für (13.3) ist  $x_\delta(s) = x_D(s) + x(s)$ , wobei  $x(s)$  die normale Betatronschwingung ist, also die Lösung der homogenen Hillschen DGL darstellt. Setzt man dies in (13.3) ein erhält man

$$D''(s) + k_x(s)D(s) = h(s) \quad (13.4)$$

Außerdem gilt für die Dispersionsfunktion  $D(s) = D(s+C)$  und  $D'(s) = D'(s+C)$ . Um die Lösung zu ermitteln wählen wir  $s_0=0$  mit  $D(s_0)=D_0$  und  $D'(s_0)=D'_0$ . Damit erhalten wir die Lösung des homogenen Teils von (13.4) zu

$$D_h(s) = D_0 C(s) + D'_0 S(s)$$

Dabei sind die cosinus- und sinusartigen Funktionen verwendet worden. Mit einer speziellen Lösung  $d(s)$  der inhomogenen DGL in (13.4) ergibt sich

$$D(s) = D_0 C(s) + D'_0 S(s) + d(s)$$

$D_0$  und  $D'_0$  werden so angepasst, dass die Periodizitätsbedingung erfüllt ist. Außerdem gilt (siehe Vorlesung 4)

$$\begin{aligned} C(s_0) &= 1 & ; & & S(s_0) &= 0 \\ C'(s_0) &= 0 & ; & & S'(s_0) &= 1 \end{aligned}$$

Um die Darstellung zu vereinfachen bezeichnen wir die Funktionen C und S nach einem Umlauf mit dem Index 1:

$$D(s_0 + C) = D_0 = D_0 C_1 + D'_0 S_1 + d_1 \quad ; \quad D'(s_0 + C) = D'_0 = D_0 C'_1 + D'_0 S'_1 + d'_1$$

$$\rightarrow D_0(1 - C_1) = D'_0 S_1 + d_1 \quad ; \quad D'_0(1 - S'_1) = D_0 C'_1 + d'_1$$

und damit folgt

$$D_0 = \frac{d'_1 S_1 + d_1 (1 - S'_1)}{(1 - C_1)(1 - S'_1) - C'_1 S_1} \quad (13.5)$$

Die Funktionen ergeben sich aus der Matrix M zu:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s) \sin \mu & \beta(s) \sin \mu \\ -\gamma(s) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s) \sin \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & S_1 \\ C'_1 & S'_1 \end{pmatrix}$$

Aus dem Nenner wird dann

$$(1 - C_1)(1 - S'_1) - C'_1 S_1 = 1 + (C_1 S'_1 - C'_1 S_1) - (C_1 + S'_1) = 2 - 2 \cos \mu = 4 \sin^2 \frac{\mu}{2}$$

Für den Zähler benötigt man den folgenden Zusammenhang, für die Dispersionsfunktion, den wir hier nicht ableiten wollen (man siehe in der Literatur, z.B. Hinterberger nach):

$$d(s) = S(s) \int_0^s h(\bar{s}) C(\bar{s}) d\bar{s} - C(s) \int_0^s h(\bar{s}) S(\bar{s}) d\bar{s}$$

Setzt man dies in den Zähler von (13.5) ein so ergibt sich:

$$S_1 d'_1 + (1 - S'_1) d_1 = S_1 [S'_1 \oint h C d\bar{s} - C'_1 \oint h S d\bar{s}] - (S' - 1) [S_1 \oint h C d\bar{s} - C_1 \oint h S d\bar{s}] = \\ S_1 \oint h C d\bar{s} + (1 - C_1) \oint h S d\bar{s}$$

mit  $S_1 = \beta_0 \sin \mu$  ;  $C_1 = \cos \mu + \alpha_0 \sin \mu$  sowie

$$C(\bar{s}) = \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \Delta\Psi + \alpha_0 \sin \Delta\Psi) \quad ; \quad S(\bar{s}) = \sqrt{\beta \cdot \beta_0} \sin \Delta\Psi$$

folgt

$$S_1 \oint h C d\bar{s} + (1 - C_1) \oint h S d\bar{s} =$$

$$\beta_0 \sin \mu \cdot \oint h \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \Delta\Psi + \alpha_0 \sin \Delta\Psi) d\bar{s} + (1 - \cos \mu + \alpha_0 \sin \mu) \oint h \sqrt{\beta \cdot \beta_0} \sin \Delta\Psi d\bar{s} =$$

$$2\sqrt{\beta_0} \cdot \sin \frac{\mu}{2} \cdot \oint h \sqrt{\beta} \cos(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2}) d\bar{s}$$

Damit können wir (13.5) endgültig hinschreiben

$$D_0 = \frac{2\sqrt{\beta_0} \cdot \sin \frac{\mu}{2} \cdot \oint h \sqrt{\beta} \cos(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2}) d\bar{s}}{4 \sin^2 \frac{\mu}{2}} = \frac{\sqrt{\beta_0}}{2 \sin \frac{\mu}{2}} \cdot \oint h \sqrt{\beta} \cos(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2}) d\bar{s}$$

oder allgemein an einer Stelle s



$$D(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \frac{\mu}{2}} \cdot \int_s^{s+C} h(\bar{s}) \sqrt{\beta(\bar{s})} \cos\left(\Delta\Psi - \frac{\mu}{2}\right) d\bar{s} \quad (13.5')$$

Man erkennt, dass  $D(s)$  immer größer wird, je näher  $\sin \frac{\mu}{2}$  der Null kommt und wird schließlich unendlich groß. Wenn also  $\sin \frac{\mu}{2} = 0 \Rightarrow \mu = 2\pi \cdot N$  und damit ist  $Q$  ganzzahlig, denn

$$Q = \frac{\mu}{2\pi} = N = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds}{\beta(s)}.$$

### 13.3. Momentum compaction Faktor und $\gamma_{tr}$

Ein Synchrotron kann nur funktionieren, wenn  $\omega = \omega(p)$ , da  $\omega = 2\pi \cdot v/C$ . Damit erhält man

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta C}{C_0} \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p_0} \quad \frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0}$$

Man nennt  $\alpha_p$  den **Momentum compaction Faktor**. Dieser stellt den Zusammenhang zwischen dem relativen Wegunterschied pro Umlauf und der relativen Impulsabweichung her.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \left( \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p \right) \frac{\Delta p}{p_0} = \eta \frac{\Delta p}{p_0} \quad (13.6)$$

In der linearen Näherung liefert  $x_D(s) = D(s) \cdot \delta$  nur im Bereich der Ablenkmagnete einen Beitrag zu  $\Delta C/C_0$ . Daher ergibt sich

$$\Delta C = \int_s^{s+C} h \cdot x_D d\bar{s} = \frac{\Delta p}{p_0} \int_s^{s+C} D(\bar{s}) h(\bar{s}) d\bar{s}$$

$$\rightarrow \alpha_p = \frac{1}{C_0} \int_s^{s+C_0} D(\bar{s}) h(\bar{s}) d\bar{s} \quad (13.7)$$

Variiert man  $D(s)$  mittel der Ionenoptik, so kann man auch  $\alpha_p$  verändern. Die Größe  $\alpha_p$  ist ein Maß für die Dispersion im Bereich der Ablenkmagnete. Je kleiner  $D(s)$ , d. h. je kompakter die Bahnen mit unterschiedlichem  $\Delta p/p_0$  beieinanderliegen, umso kleiner ist  $\alpha_p$ . Nun gibt es ein  $\gamma_{tr}$ , für welches

$$\eta = \left( \frac{1}{\gamma_{tr}^2} - \alpha_p \right) = 0 \quad \text{wird. Dies geschieht bei der entsprechenden Übergangsenergie } E_{tr} = \gamma_{tr} m_0 c^2 .$$

$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2}$  und damit erhalten wir die folgenden Betriebsbereiche:

$$\gamma < \gamma_{tr} \Leftrightarrow \eta > 0, \quad \gamma = \gamma_{tr} \Leftrightarrow \eta = 0, \quad \gamma > \gamma_{tr} \Leftrightarrow \eta < 0$$

Bei  $\gamma = \gamma_{tr} \Leftrightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0$ . Damit laufen die Teilchen isochron im Ring um, unabhängig von deren

Impuls. Phasenfokussierung und Synchrotronschwingung ist nur möglich, wenn  $\gamma \neq \gamma_{tr}$  d.h.  $\eta \neq 0$  ist. Daher muss während der Hochbeschleunigung beim Übergang von  $\gamma < \gamma_{tr}$  nach  $\gamma > \gamma_{tr}$  ein HF-Phasensprung von  $\varphi_s$  nach  $\pi - \varphi_s$  stattfinden. Der Übergang ist ein Spezialproblem der Synchrotronbeschleuniger für Ionen, das nicht immer vermieden werden kann.

Im Übrigen gilt die Beziehung

$$\alpha_p \approx \frac{1}{Q_x^2}, \quad \gamma_{tr} \approx Q_x$$

In einem Linearbeschleuniger ist  $\alpha_p = 0$  und damit  $\eta = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \varphi = \varphi_s$ .

Für extrem relativistische Teilchen strebt  $\eta$  gegen Null, und die Phasenschwingungen "erstarren".

### 13.4. Störfelder und Resonanzen

Ein Dipolfeldfehler  $\delta B$  an der Stelle  $s_0$ , der sich über eine infinitesimal kurze Wegstrecke  $\Delta s$  erstreckt, verursacht eine lokale Störung, die sich in der Form einer Winkeländerung ("Kick")  $\Delta x'$  äußert. Damit wird die Gleichgewichtsbahn eines Kreisbeschleunigers, der „closed orbit“, den das Sollteilchen bei jedem Umlauf von neuem durchlaufen soll, gestört. Man verwendet daher auch den Begriff „closed orbit distortion“.

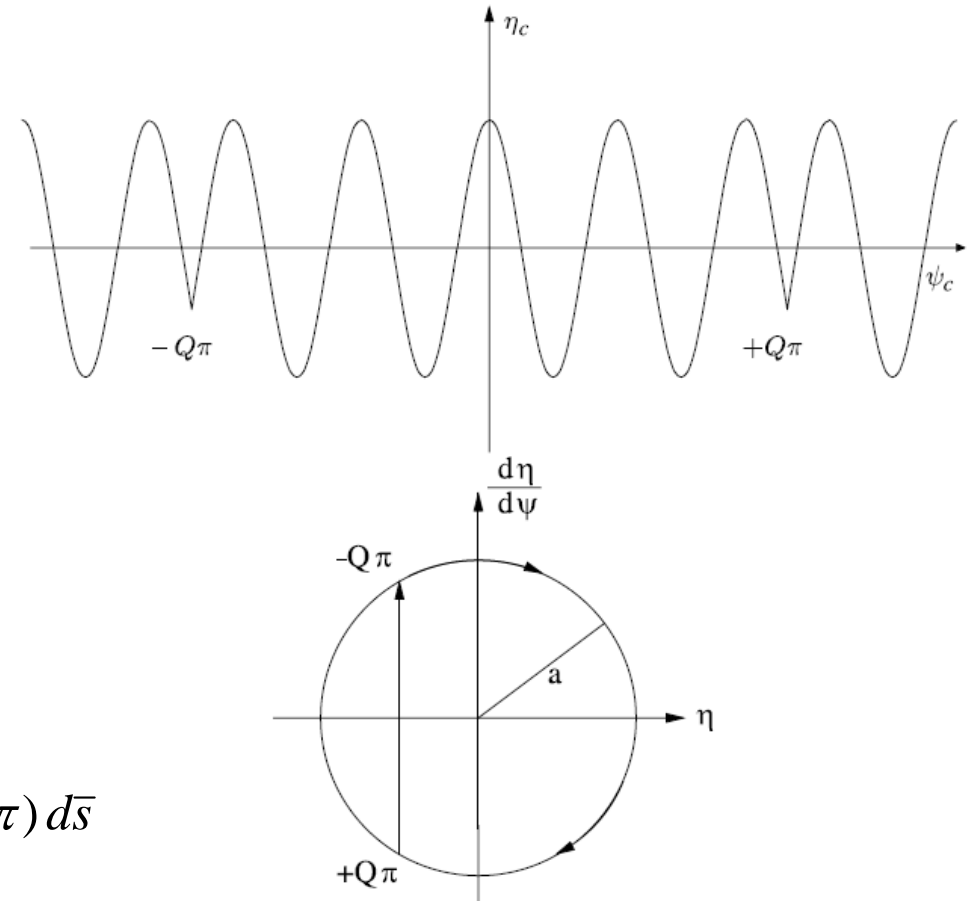
Wenn eine Störung vorliegt, machen die Teilchen Betatronschwingungen um die gestörte Gleichgewichtsbahn. Die ursprüngliche ideale Gleichgewichtsbahn wird durch die gestörte Gleichgewichtsbahn ersetzt.

Beschreiben kann man dies mittels einer Hillschen DGL mit der Form

$$x'' + k_x(s) = F(s) \quad , \quad \Delta x' = F(s_0)\Delta s$$

Deren Lösung aus (13.5') folgt

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin Q\pi} \cdot \int_s^{s+C} F(\bar{s}) \sqrt{\beta(\bar{s})} \cos(\Delta\Psi - Q\pi) d\bar{s}$$



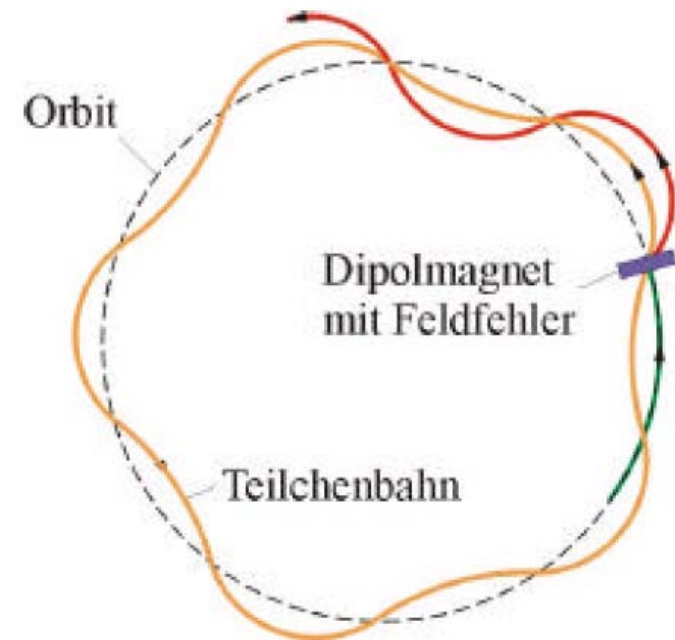
$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin Q\pi} \cdot \Delta x' \sqrt{\beta(s_0)} \cos(\Delta\Psi - Q\pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{x(s)}{\sqrt{\beta(s)}} = \frac{\sqrt{\beta(s_0)} \cdot \Delta x'}{2 \sin Q\pi} \cos(\Delta\Psi - Q\pi)$$

Damit ergibt sich die Amplitude zu  $a = \frac{\sqrt{\beta(s_0)} \cdot \Delta x'}{2 \sin Q\pi}$ . Die Amplitude ist proportional zum Kick, zu den Betatronfunktionen und reziprok zum  $\sin(Q\pi)$ . Damit divergiert die Amplitude mit ganzzahligem  $Q$ ! Dies nennt man auch ein **ganzzahliges Stoppband!**

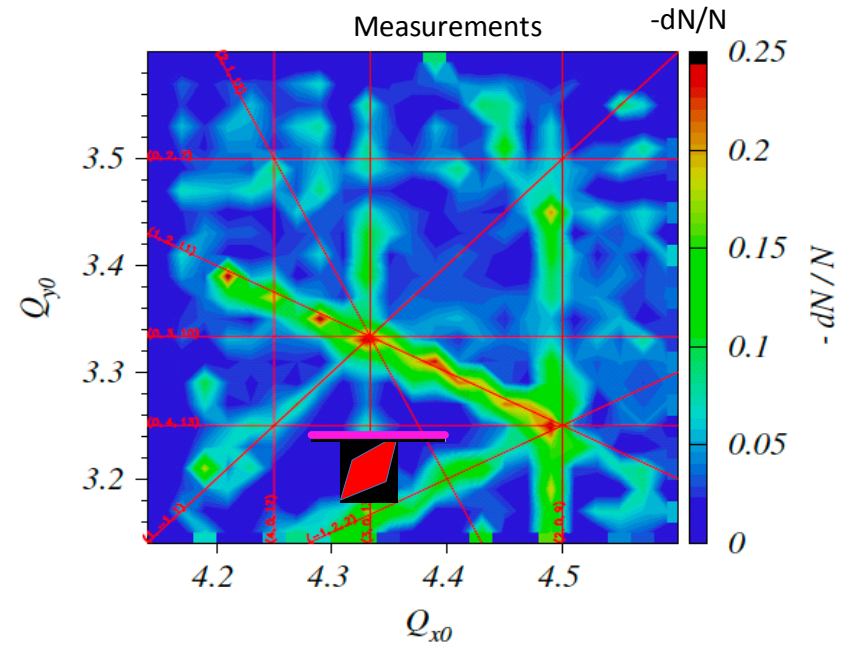
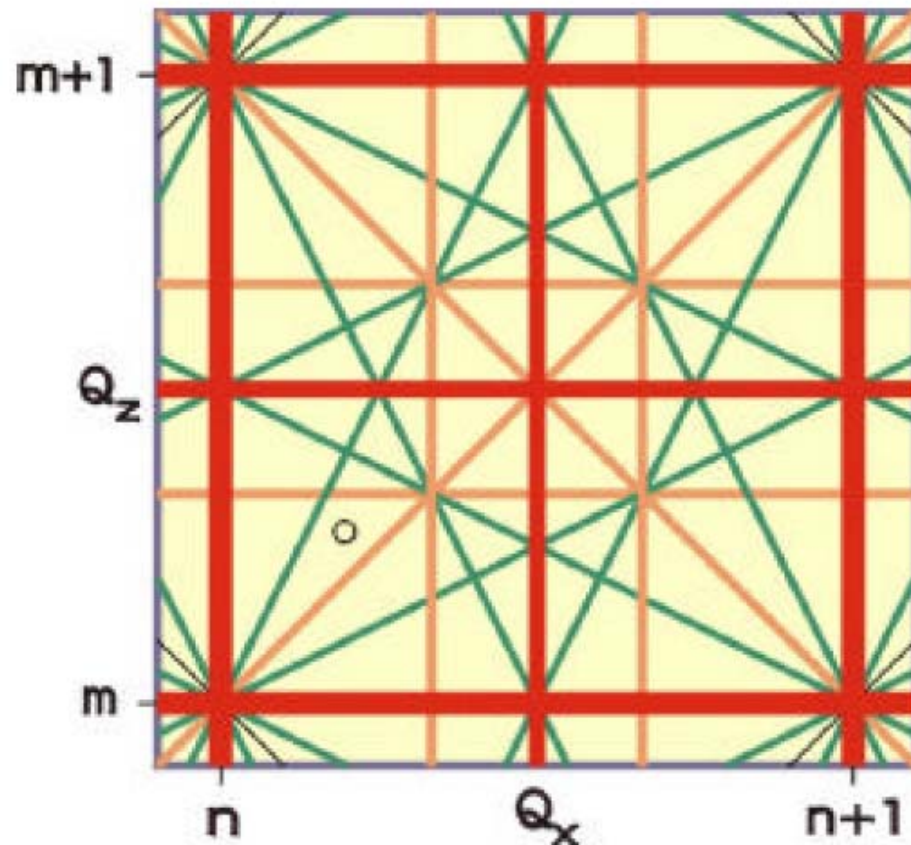
In diesem Fall passieren die Teilchen Feldfehler Immer mit derselben Phase und die Fehler addieren sich zu großen Amplituden auf.

Mit Sterrermagneten versucht man diese Störungen zu korrigieren.

| Feldfehler      | optische Resonanz         |
|-----------------|---------------------------|
| Dipolfehler     | $\underline{Q} = n$       |
| Quadrupolfehler | $\underline{Q} = n + 1/2$ |
| Sextupolfehler  | $\underline{Q} = n + 1/3$ |
| Oktupolfehler   | $\underline{Q} = n + 1/4$ |
| usw.            | usw.                      |



Man kann dann ein entsprechendes Tune-Diagramm erstellen mit den Resonanzen verschiedener Ordnung:



G. Franchetti et al., GSI-Acc-Note-2005-02-001

$Q_x - Q_z$ -Diagramm  
bis zur 3. Ordnung

$$m \cdot Q_x + n \cdot Q_z = p \quad (m, n, p = \text{ganze Zahlen})$$