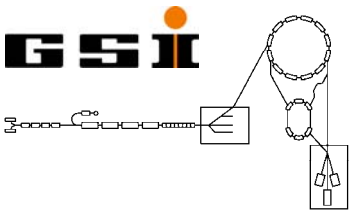


Inhalt Teil 1

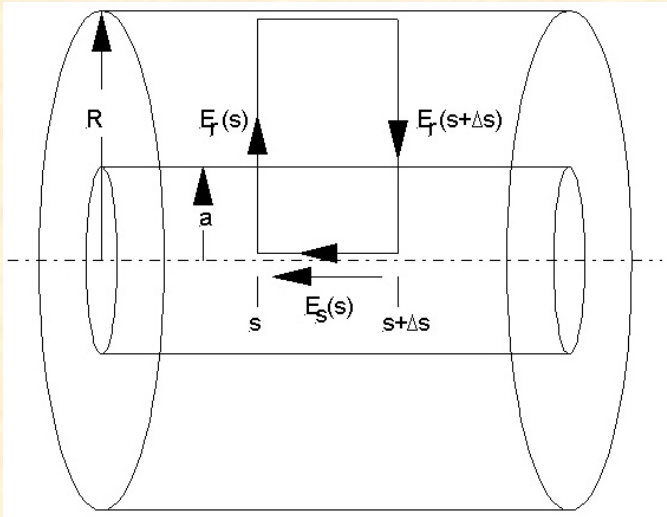
9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

- 9.1 Longitudinale Feldstärke im Strahl durch den longitudinal variierenden Strahlstrom
- 9.2 Die durch Raumladung erzeugte Spannung pro Umlauf
- 9.3 Die Berücksichtigung der Raumladung nach dem Hofmann-Pedersen-Modell
- 9.4 Wiederholung der Erkenntnisse vom 10.06.2011
- 9.5 Die DGL's im longitudinalen Phasenraum
- 9.6 Eine Substitution zur Beseitigung der Pseudodämpfung in der DGL
- 9.7 Lösungsansatz für die Hillsche-DGL
- 9.8 Die adiabatische Näherungslösung der Bewegungsgleichungen
- 9.9 Beweis: Die Variablen w und $\Delta\Phi$ sind zueinander kanonisch konjugiert
- 9.10 Ansatz zur Beschreibung der Bewegung von Ellipsen im longitudinalen Phasenraum



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.1 Longitudinale Feldstärke im Strahl durch den longitudinal variierenden Strom



Das Strahlrohr hat den Radius R und die Wand sei unendlich gut leitend. Mittig im Rohr bewegt sich der Ionenstrahl mit der Geschwindigkeit v in s -Richtung. Der Ionenstrahl hat den Radius a und weist eine homogene Dichte r auf, die radial nicht variieren soll. Longitudinal darf die Dichte sehr wohl variieren. Im Ionenstrahl variiert natürlich dann der Strahlstrom mit dem Radius r gemäß der Formeln:

$$I(r, s) = \rho(s) v \pi r^2 = I(s) \frac{r^2}{a^2} \quad \text{für } r \leq a$$

$$I(s) = \rho(s) v \pi a^2 \quad \text{für } r > a$$

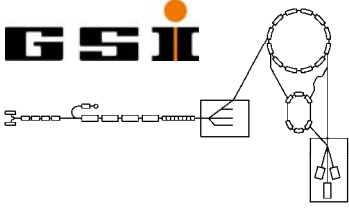
Nun kann man die radialen elektrischen Felder bzw. die azimuthalen H-Felder im Strahl und außerhalb des Strahl recht einfach ausrechnen. Zur Berechnung der E-Felder wird die vierte Maxwellsche Gleichung benutzt, zur Berechnung der H-Felder die Erste:

$$E_r(s) = \frac{I(s) r}{2\pi \epsilon_0 v a^2} \quad \text{für } r \leq a$$

$$H_\phi(s) = \frac{I(s) r}{2\pi a^2} \quad \text{für } r \leq a$$

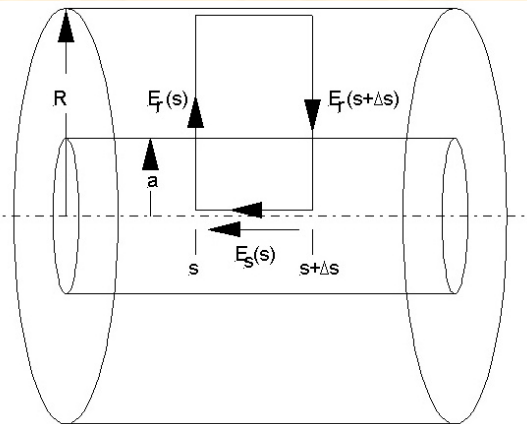
$$E_r(s) = \frac{I(s)}{2\pi \epsilon_0 v r} \quad \text{für } r > a$$

$$H_\phi(s) = \frac{I(s)}{2\pi r} \quad \text{für } r > a$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.1 Longitudinale Feldstärke im Strahl durch den longitudinal variierenden Strom



Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist das Induktionsgesetz mit dem Umlaufintegral wie im Bild links gezeigt:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot \vec{n} da$$

Wir werten zunächst die linke Seite aus und beachten, daß wenn die Strahlrohrwand unendlich gut leitend ist, das Linienintegral dort Null ist. Es ergibt sich dann der etwas längliche Ausdruck:

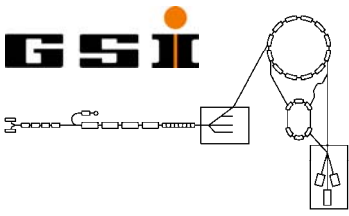
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_s(s) \Delta s + \frac{I(s)}{4\pi\epsilon_0 v} + \frac{I(s)}{2\pi\epsilon_0 v} \ln\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{I(s+\Delta s)}{4\pi\epsilon_0 v} - \frac{I(s+\Delta s)}{2\pi\epsilon_0 v} \ln\left(\frac{R}{a}\right) = -E_s(s) \Delta s - \frac{I'(s)\Delta s}{4\pi\epsilon_0 v} - \frac{I'(s)\Delta s}{2\pi\epsilon_0 v} \ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

Die rechte Seite ist einfacher auszuwerten:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot \vec{n} da = -\mu_0 v \frac{I'(s)\Delta s}{4\pi} - \mu_0 v \frac{I'(s)\Delta s}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

Im Endeffekt ergibt sich, Gott sei Dank, ein übersichtlicher Ausdruck:

$$-E_s(s) = (1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2) \frac{I'(s)}{4\pi\epsilon_0 v} + (1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2) \frac{I'(s)}{2\pi\epsilon_0 v} \ln\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{\left(1 + 2 \ln\left(\frac{R}{a}\right)\right) I'(s)}{4\pi\epsilon_0 v \gamma^2} = \frac{g I'(s)}{4\pi\epsilon_0 v \gamma^2}$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.2 Die durch Raumladung erzeugte Spannung pro Umlauf

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Feldstärke im Strahl gegeben ist durch:

$$E_s(s) = -\frac{g I'(s)}{4\pi\epsilon_0 v \gamma^2} = -\frac{g}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{d\lambda(s)}{ds}$$

Dabei ist λ die Linienladungsdichte und g der charakteristische g -Faktor der nur als Mittelwert angegeben werden kann. Im SIS18 hat man etwa:

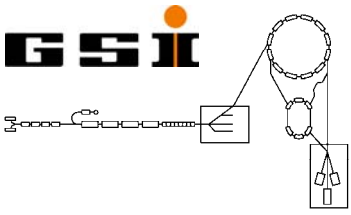
$$g = 1 + 2 \ln\left(\frac{R}{a}\right) \approx 1,89$$

Die vom Strahl durch die Raumladung erfahrene Spannung pro Umlauf ist einfach die Feldstärke mal dem Ringumfang:

$$V_{RI}(s) = \frac{g R}{2\epsilon_0 \gamma^2} \frac{d\lambda(s)}{ds}$$

Die einzige Schwierigkeit die wir noch haben ist die Variablentransformation von s zur HF-Phase ϕ , damit wir das Ganze in die Hamilton-Funktion einbauen können. Dabei helfen die Formeln:

$$d\phi = -\frac{h}{R} ds, \quad \lambda(s) = -\frac{h}{R} \lambda(\phi) \Rightarrow \frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\lambda}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} = \frac{h^2}{R^2} \frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} \Rightarrow V_{RI}(\phi) = \frac{g h^2}{2\epsilon_0 R \gamma^2} \frac{d\lambda(\phi)}{d\phi}$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.3 Berücksichtigung der Raumladung nach dem Hofmann-Pedersen-Modell

Wir werden nun die Raumladung in unsere alte Hamilton-Funktion einbauen:

$$H(w, \phi) = -\frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{\beta^2 E} w^2 + \frac{Ze\hat{V}}{2\pi} \left\{ \cos(\phi) - \cos(\phi_s) + (\phi - \phi_s) \sin(\phi_s) \right\}$$

Die Potential-Funktion in der Hamilton-Funktion kann man durch folgendes Integral über die Spannung am Beschleunigungsspalt darstellen:

$$U_{\text{HF}}(\phi) = \int_{\phi}^{\phi_s} \hat{V} (\sin(\phi) - \sin(\phi_s)) d\phi = \hat{V} \left\{ \cos(\phi) - \cos(\phi_s) + (\phi - \phi_s) \sin(\phi_s) \right\}$$

Die durch die Raumladung pro Umlauf erfahrene Spannung kann man natürlich genauso in eine Potential-Funktion umrechnen. Gemäß obiger Darstellung gilt dann nach Integration:

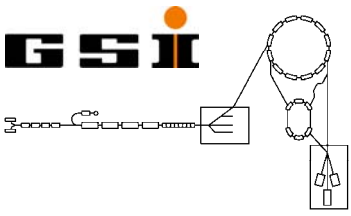
$$V_{\text{RI}}(\phi) = \frac{gh^2}{2\epsilon_0 R \gamma^2} \frac{d\lambda(\phi)}{d\phi}$$

$$U_{\text{RI}}(\phi) = \frac{gh^2}{2\epsilon_0 R \gamma^2} (\lambda(\phi_s) - \lambda(\phi))$$

Das kann man jetzt in die Hamiltonfunktion einfügen, man weiß aber noch nichts über die Linienladungsdichte λ . Die neue Hamilton-Funktion lautet also:

$$H(w, \phi) = -\frac{1}{2} a w^2 + \frac{1}{2} b \left\{ U_{\text{HF}}(\phi) + \xi (\lambda(\phi_s) - \lambda(\phi)) \right\}$$

$$b = \frac{Ze}{\pi}, \quad \xi = \frac{h^2 g}{2\epsilon_0 R \gamma^2}$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.3 Berücksichtigung der Raumladung nach dem Hofmann-Pedersen-Modell

Also wir haben jetzt eine Hamilton-Funktion die uns nichts nützt; wir müssen erst einen vernünftigen Ansatz machen

$$H(w, \phi) = -\frac{1}{2} a w^2 + \frac{1}{2} b \{ U_{\text{HF}}(\phi) + \xi(\lambda(\phi_s) - \lambda(\phi)) \}$$

Ein vernünftiger Ansatz ist folgender:

$$\lambda(\phi) = A w^2$$

Das kann man in die Hamilton-Funktion einsetzen:

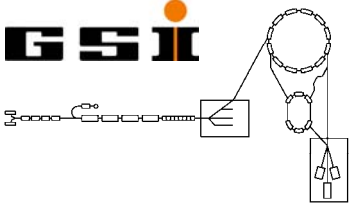
$$H = -\frac{1}{2} \frac{a}{A} \lambda(\phi) + \frac{1}{2} b \{ U_{\text{HF}}(\phi) + \xi(\lambda(\phi_s) - \lambda(\phi)) \}$$

Am linken Bunchrand verschwindet die Linienladungsdichte:

$$\lambda(\phi_1) = \lambda(\phi_1) = 0 \Rightarrow H = \frac{1}{2} b \{ U_{\text{HF}}(\phi_1) + \xi \lambda(\phi_s) \}$$

Als Ergebnis hat man einen Ausdruck für die Linienladungsdichte mit unbekannter Konstante A:

$$\lambda(\phi) = A \frac{b}{a} \{ U_{\text{HF}}(\phi) - U_{\text{HF}}(\phi_1) \} - A \frac{b}{a} \xi \lambda(\phi)$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.3 Berücksichtigung der Raumladung nach dem Hofmann-Pedersen-Modell

Diesen Ausdruck kann man nach $\lambda(\phi)$ umstellen $\lambda(\phi) = A \frac{b}{a} \{U_{\text{HF}}(\phi) - U_{\text{HF}}(\phi_1)\} - A \frac{b}{a} \xi \lambda(\phi)$

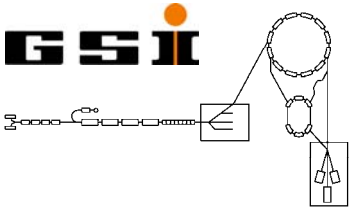
$$\lambda(\phi) = \frac{A \frac{b}{a} \{U_{\text{HF}}(\phi) - U_{\text{HF}}(\phi_1)\}}{\left(A \frac{b}{a} \xi + 1 \right)}$$

Das Integral über die Linienladungsdichte vom linken bis zum rechten Bunchrand muß die Gesamtladung ergeben:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \lambda(\phi) d\phi = NZe$$

Damit ist die Konstante A bestimmt zu:

$$A = \frac{NZe}{\frac{b}{a} (NZe\xi - U_m(\phi_1, \phi_2))}, \quad U_m(\phi_1, \phi_2) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (U_{\text{HF}}(\phi) - U_{\text{HF}}(\phi_1)) d\phi$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.3 Berücksichtigung der Raumladung nach dem Hofmann-Pedersen-Modell

Setzt man nun die Konstante A in die Linienladungsdichte ein, so erhält man einen recht übersichtlichen Ausdruck und bildet man gleich daraus die Differenz $\lambda(\phi_s) - \lambda(\phi)$

$$\lambda(\phi) = \frac{NZe \{U_{\text{HF}}(\phi) - U_{\text{HF}}(\phi_1)\}}{U_m(\phi_1, \phi_2)} \Rightarrow \lambda(\phi_s) - \lambda(\phi) = -\frac{NZe}{U_m(\phi_1, \phi_2)} U_{\text{HF}}(\phi)$$

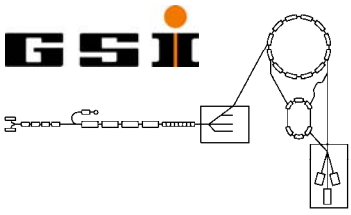
dann erhält man folgende Hamilton-Funktion:

$$H(w, \phi) = -\frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{\beta^2 E} w^2 + \frac{Ze}{2\pi} \left(1 - \frac{NZe}{U_m(\phi_1, \phi_2)} \frac{gh^2}{2\varepsilon_0 R \gamma^2} \right) U_{\text{HF}}(\phi)$$

Der Ausdruck in Klammern ist besonders nett, da er einem erlaubt, die durch Raumladung erzeugte Spannungsreduzierung auszudrücken:

$$\hat{V}_{\text{mod}} = \left(1 - \frac{NZe}{U_m(\phi_1, \phi_2)} \frac{gh^2}{2\varepsilon_0 R \gamma^2} \right) \hat{V}$$

Das Integral im Nenner kann man näherungsweise natürlich analytisch ausrechnen, aber mit Hilfe von Mathcad oder Mathematica ist die numerische Berechnung relativ einfach.



Untenstehende Hamilton-Funktion ist wieder unser Startpunkt:

$$H(\Delta\phi, w, t) = -\frac{1}{2} \frac{h\omega_r^2 \eta}{E\beta^2} w^2 + \frac{Ze\hat{V}(t)}{2\pi} \left\{ \cos(\Delta\phi + \phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s) \right\}$$

Wir machen wieder die Näherung für kleine Amplituden $\Delta\phi$:

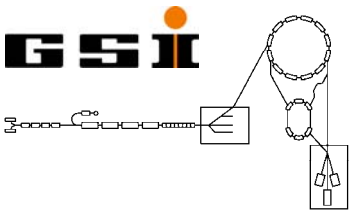
$$\begin{aligned} H(\Delta\phi, w, t) &= -\frac{1}{2} a w^2 + \hat{b} \left\{ \cos(\Delta\phi + \phi_s) - \cos(\phi_s) + \Delta\phi \sin(\phi_s) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} a w^2 - \frac{1}{2} \hat{b} \cos(\phi_s) \Delta\phi \\ &= -\frac{1}{2} a w^2 - \frac{1}{2} b \Delta\phi \end{aligned}$$

Für $E_s = \text{const}$ bleibt, erhalten wir die schon bekannten Synchrotron-Schwingungen:

$$\Delta\phi(t) = \Delta\hat{\phi} \cos(\Omega_s t) \qquad w(t) = \hat{w} \sin(\Omega_s t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \Delta\hat{\phi} \sin(\Omega_s t)$$

Das sind die bekannten Ellipsen im $\{\Delta\phi, w\}$ -Phasenraum und die Synchrotronfrequenz ist:

$$\Omega_s = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{Ze\hat{V}}{2\pi} \frac{h\omega_r^2 \eta}{\beta^2 E} \cos(\phi_s)}$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.4 Wiederholung der Erkenntnisse vom 10.06.2011

Während der Beschleunigung ändern sich E_s , η_s und eventuell V langsam. Bei hinreichend langsamer Änderung (adiabatischer Änderung) solcher Parameter bleibt das Wirkungsintegral konstant:

$$I = \oint p dq = \oint w d\Delta\phi = \text{const}$$

Die Integration verläuft über eine Synchrotron-Schwingung bzw. über eine Periode.

$$\oint w d\Delta\phi = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_s}} \hat{w} \sin(\Omega_s t) d(\Delta\phi \cos(\Omega_s t)) = \hat{w} \Delta\hat{\phi} \Omega_s \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_s}} \sin^2(\Omega_s t) dt = \hat{w} \Delta\hat{\phi} \Omega_s \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\Omega_s} = \pi \hat{w} \Delta\hat{\phi}$$

Es folgt, das Produkt $\hat{w} \Delta\hat{\phi}$ bleibt bei adiabatischer Energieerhöhung konstant. Natürlich bleibt dann auch die Fläche der Ellipse im $\{\Delta\phi, w\}$ -Phasenraum bei der Beschleunigung konstant.

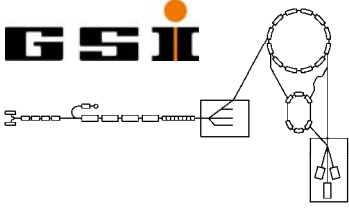
Longitudinale Emittanz: Fläche im $\{\Delta\phi, w\}$ -Phasenraum geteilt durch π , die der Strahl einnimmt.

Die longitudinale Emittanz ist in diesem Phasenraum eine Konstante.

Die Form der Ellipse ändert sich allerdings mit wachsender Energie des synchronen Teilchens:

$$\hat{w} \Delta\hat{\phi} = \text{const} = \sqrt{\frac{b}{a}} \Delta\hat{\phi}^2 = \sqrt{\frac{Ze\hat{V}}{2\pi} \frac{\beta^2 E}{h\omega_r^2 \eta}} \Delta\hat{\phi}^2 \sim \sqrt{E} \Delta\hat{\phi}^2 \Rightarrow \Delta\hat{\phi} \sim \frac{1}{E^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow \Delta\hat{\phi} \sim E^{-\frac{1}{4}}$$

$$w \sim E^{\frac{1}{4}}$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.5 Die DGL's im longitudinalen Phasenraum

Wir starten wieder mit der schon bekannten, explizit zeitabhängigen Hamilton-Funktion:

$$H(\Delta\phi, w, t) = -\frac{1}{2} a w^2 - \frac{1}{2} b \Delta\phi$$

Mit Hilfe der kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \Delta\dot{\phi} = -a w$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta\phi} = -\dot{w} = -b \Delta\phi$$

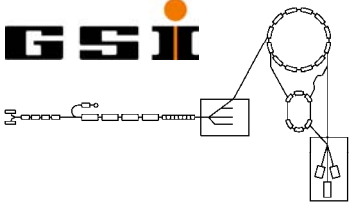
leitet man die beiden Differentialgleichungen mit Pseudodämpfung her

$$\Delta\ddot{\phi}(t) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \Delta\dot{\phi}(t) + a(t)b(t)\Delta\phi(t) = 0$$

Beide DGL's sind vom allgemeinen Typ:

$$\Rightarrow y''(x) - f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0$$

$$\ddot{w}(t) - \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} \dot{w}(t) + a(t)b(t)w(t) = 0$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.6 Eine Substitution zur Beseitigung der Pseudodämpfung in der DGL

Wir haben also folgende DGL zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten:

$$y''(x) - f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0$$

Durch die Substitution $y(x) = u(x)e^{\frac{1}{2}\int y(x)dx}$ werden wir das Dämpfungsglied los, denn es gilt für die erste- und zweite Ableitung:

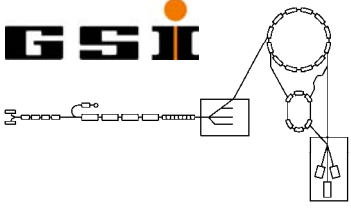
$$y'(x) = \left(u'(x) + u(x) \frac{1}{2} y(x) \right) e^{\frac{1}{2}\int y(x)dx}$$

$$y''(x) = \left(u''(x) + u(x)f(x) + u(x) \frac{1}{2} f'(x) + u(x) \frac{1}{2} f^2(x) \right) e^{\frac{1}{2}\int y(x)dx}$$

Dann wird aus der obigen DGL eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne Dämpfung:

$$u''(x) + \left\{ g(x) + \frac{1}{2} f'(x) - \frac{1}{4} f^2(x) \right\} u(x) = 0$$

d.h. das Dämpfungsglied lässt sich wegtransformieren.



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.7 Lösungsansatz für die Hillsche-DGL

Wir nehmen jetzt unsere Dgl. für $\Delta\phi(t)$

$$\Delta\ddot{\phi}(t) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \Delta\dot{\phi}(t) + a(t)b(t)\Delta\phi(t) = 0$$

und setzen gemäß der Vorschrift die Koeffizienten von oben ein. Wir erhalten dann:

$$\ddot{u}(t) + \left(a(t)b(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right) u(t) = \ddot{u}(t) + \left(a(t)b(t) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right) u(t) = 0$$

Der zweite und dritte Term in der Klammer oben rechts sind klein von zweiter Ordnung, daher werden sie im Vergleich zum ersten Term vernachlässigt (adiabatische Änderung):

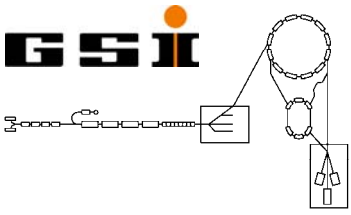
$$\ddot{u}(t) + \Omega_s^2(t)u(t) = 0$$

Hier machen wir jetzt folgenden Lösungsansatz:

$$u(t) = \xi(t) e^{i \int_{t_0}^t \Omega_s(t) dt}$$

Bei adiabatischer Änderung fällt wieder der erste Term weg. Dann muß der Imaginärteil Null sein:

$$\ddot{\xi}(t) + i(\dot{\Omega}_s(t)\xi(t) + 2\Omega_s(t)\dot{\xi}(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\Omega}_s(t)}{\Omega_s(t)}$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.8 Die adiabatische Näherungslösung der Bewegungsgleichungen

Die Lösung für $\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\Omega}_s(t)}{\Omega_s(t)}$ ist einfach $\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_s(t)}}$

Um den Überblick zu bewahren fassen wir jetzt mal zusammen:

Die erste Substitution war $\Delta\phi(t) = u(t) e^{\frac{1}{2} \int \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt} = u(t) \sqrt{a(t)}$, denn das Integral ist ausführbar.

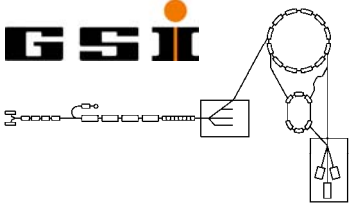
Für die ungedämpfte DGL machten wir den Lösungsansatz: $u(t) = \frac{A}{\sqrt{\Omega_s(t)}} e^{i \int_{t_0}^t \Omega_s(t) dt}$

Setzt man den Lösungsansatz in die Substitution ein, so erhält man für $\Delta\phi(t)$ die Lösung:

$$\Delta\phi(t) = A \sqrt{\frac{a(t)}{\Omega_s(t)}} \cos\left(\int_{t_0}^t \Omega_s(t') dt' + \delta_1\right)$$

Da wir die Lösung für $\Delta\phi(t)$ schon kennen, kann man auch die Lösung für $w(t)$ hinschreiben:

$$\ddot{w} - \frac{\dot{b}}{b} \dot{w} + abw = 0 \quad \Rightarrow \quad w(t) = B \sqrt{\frac{b(t)}{\Omega_s(t)}} \cos\left(\int_{t_0}^t \Omega_s(t') dt' + \delta_2\right)$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.9 Beweis: Die Variablen w und $\Delta\Phi$ sind zueinander kanonisch konjugiert

Anhand der beiden Lösungen kann man jetzt die Abhängigkeit von der Energie unmittelbar sehen:

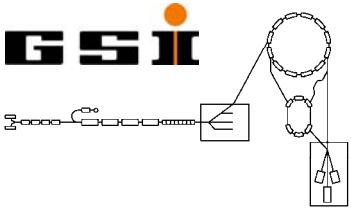
$$\Delta\phi(t) = A \sqrt{\frac{a(t)}{\Omega_s(t)}} \cos\left(\int_{t_0}^t \Omega_s(t') dt' + \delta_1\right) \Rightarrow \Delta\hat{\phi}(t) = A \sqrt{\frac{a(t)}{\Omega_s(t)}} \sim E^{-\frac{1}{4}}$$

$$w(t) = B \sqrt{\frac{b(t)}{\Omega_s(t)}} \cos\left(\int_{t_0}^t \Omega_s(t') dt' + \delta_2\right) \Rightarrow \hat{w}(t) = B \sqrt{\frac{b(t)}{\Omega_s(t)}} \sim E^{\frac{1}{4}}$$

Die Lösung sind natürlich wieder Ellipsenbahnen. Da die Ellipsenfläche aus den beiden Halbachsen berechnet werden kann, ergibt sich einfach:

$$\text{Phasenraumfläche} = \pi \Delta\hat{\phi}(t) \hat{w}(t) = AB \sqrt{\frac{b(t)}{\Omega_s(t)}} \sqrt{\frac{b(t)}{\Omega_s(t)}} = AB = \text{const}$$

Damit ist gezeigt: Die Dichte der Teilchen bleibt bei Beschleunigung im $\{\Delta\phi, \Delta E/\omega_p\}$ -Phasenraum konstant. Diese Variablen sind also zueinander kanonisch konjugiert.



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.10 Ansatz zur Beschreibung der Bewegung von Ellipsen im longitudinalen Phasenraum

Wir starten wieder mit der Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\Delta\phi$ mit Pseudodämpfung

$$\Delta\ddot{\phi} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\Delta\dot{\phi} + a(t)b(t)\Delta\phi = 0$$

Um die Pseudodämpfung loszuwerden machen wir wieder die schon bekannte Substitution

$$\Delta\phi(t) = u(t)e^{\frac{1}{2}\int \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt} = u(t)\sqrt{a(t)}$$

Die unsere Dgl. überführt in:

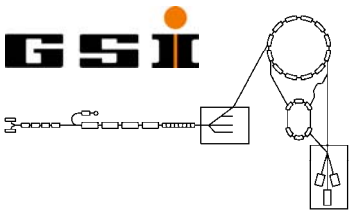
$$\ddot{u} + \left(a(t)b(t) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right) u = \ddot{u} + K(t)u = 0$$

Wir werden diesmal nichts vernachlässigen; wir fassen nur alles zu einem Koeffizienten $K(t)$ zusammen. Dann machen wir für $u(t)$ folgenden Ansatz:

$$u(t) = A\xi(t)\cos(\psi(t) + \varphi)$$

Bitte im Kopf behalten, daß durch die erste Substitution die Lösung für $\Delta\phi(t)$ so aussieht:

$$\Delta\phi(t) = A\sqrt{a(t)}\xi(t)\cos(\psi(t) + \varphi)$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.10 Ansatz zur Beschreibung der Bewegung von Ellipsen im longitudinalen Phasenraum

Wir bilden also die erste und zweite Zeitableitung unseres Lösungsansatzes für $u(t)$:

$$\dot{u}(t) = A \left(\dot{\xi}(t) \cos(\psi(t) + \varphi) - \xi(t) \dot{\psi}(t) \sin(\psi(t) + \varphi) \right)$$

$$\ddot{u}(t) = A \left(\left(\ddot{\xi} - \xi \dot{\psi}^2 \right) \cos(\psi + \varphi) - \left(2 \dot{\xi} \dot{\psi} + \xi \ddot{\psi} \right) \sin(\psi + \varphi) \right)$$

Das setzen wir unsere Dgl. $\ddot{u} + K(t)u = 0$ Und erhalten durch ordnen nach sin und cos :

$$\left(\ddot{\xi} - \xi \dot{\psi}^2 + K\xi \right) \cos(\psi + \varphi) - \left(2 \dot{\xi} \dot{\psi} + \xi \ddot{\psi} \right) \sin(\psi + \varphi) = 0$$

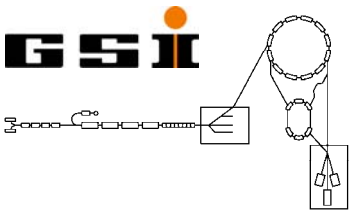
Damit diese Gleichung für alle φ erfüllt ist, müssen sowohl der Vorfaktor des Sinus, als auch der Vorfaktor des Cosinus, beide für sich, identisch verschwinden. Also muß gelten:

$$\ddot{\xi} - \xi \dot{\psi}^2 + K\xi = 0$$

$$2 \dot{\xi} \dot{\psi} + \xi \ddot{\psi} = 0$$

Beide Gleichungen sind Bestimmungsgleichungen für $\psi(t)$ und $\xi(t)$, so daß

$u(t) = A\xi(t) \cos(\psi(t) + \varphi)$ Lösung von $\ddot{u} + K(t)u = 0$ ist.



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.10 Ansatz zur Beschreibung der Bewegung von Ellipsen im longitudinalen Phasenraum

Die Gleichung $2\dot{\xi}\dot{\psi} + \xi\ddot{\psi} = 0$ läßt sich sofort integrieren:

$$\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} = -2\frac{\dot{\xi}}{\xi} \Rightarrow \ln(\dot{\psi}) = -2\ln(\xi) \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{1}{\xi^2} \Rightarrow \psi = \int \frac{1}{\xi^2} dt$$

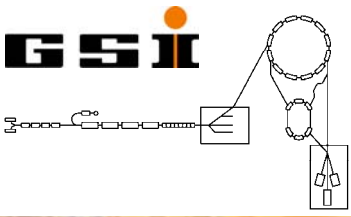
Elimination von ψ' in der Gleichung $\ddot{\xi} - \xi\dot{\psi}^2 + K\xi = 0$ liefert eine Differentialgleichung als Bestimmungsgleichung für ξ :

$$\ddot{\xi} + K\xi - \frac{1}{\xi^3} = 0$$

Das ist die Dgl. für die Strahl-Envelope im longitudinalen Phasenraum. Die Dgl. hat einen interessanten Term, nämlich $1/\xi^3$. Er sorgt dafür, das ξ niemals durch Null geht, da dabei der letzte Term über alle Maßen ansteigen würde.

Nach Ermittlung von ξ ergibt sich ψ gemäß des obigen Integrals. Jetzt haben wir die Lösung für:

$$\Delta\phi(t) = A\sqrt{a(t)}\xi(t)\cos(\psi(t) + \varphi)$$



9. Longitudinale Strahldynamik mit Raumladung

9.10 Ansatz zur Beschreibung der Bewegung von Ellipsen im longitudinalen Phasenraum

Wir haben also formal die Lösung für $\Delta\phi$ gefunden, wir brauchen aber noch die Lösung für w

$$\Delta\phi(t) = A\sqrt{a(t)}\xi(t)\cos(\psi(t) + \varphi)$$

Eine der kanonischen Bewegungsgleichungen verknüpft jedoch $\Delta\phi$ mit w :

$$\frac{\partial H}{\partial w} = -\Delta\dot{\phi} = -aw$$

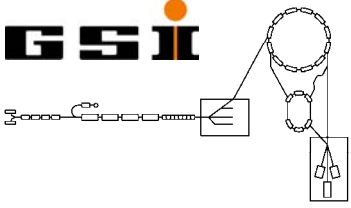
Leitet man $\Delta\phi$ nach der Zeit ab, dann erhält man folgende Gleichung für w :

$$w(t) = -\frac{A}{a} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{\sqrt{a}} \xi + \sqrt{a} \dot{\xi} \right) \cos(\psi + \varphi) - \sqrt{a} \frac{1}{\xi} \sin(\psi + \varphi) \right]$$

$$\Delta\hat{\phi} = A\sqrt{a}\xi$$

$$\hat{w} = \frac{A}{\sqrt{a}} \frac{1}{\xi}$$

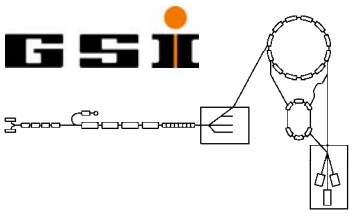
$$\text{Phasenraumfläche} = \pi\Delta\hat{\phi} \hat{w} = A\sqrt{a} \xi A \frac{1}{\sqrt{a} \xi} = A^2 = \text{const}$$



Inhalt Teil 2

10. Kavitäten

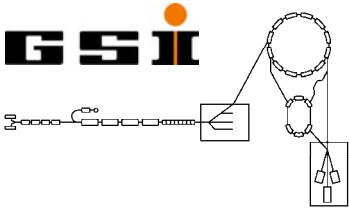
- 10.1 Die SIS18 Ferrit-Kavität (installiert im Tunnel)
- 10.2 Das Schema der SIS18 Ferrit-Kavität selbst
- 10.3 Das Schema der SIS18-Ferritkavität mit Tetrodenverstärker
- 10.4 Zur Ferrit-Füllung der Kavität
- 10.5 Ein vereinfachtes Kavitätenmodell zur Auswertung der ersten und zweiten Maxwellschen Gleichung
- 10.6 Zur Erklärung der Funktion der Achterschleife
- 10.7 Die Auswertung der zweiten Maxwellschen Gleichung am vereinfachten Kavitätenmodell
- 10.9 Gapspannung und die Kavitätenimpedanz
- 10.10 Die Eingangsimpedanz der Kavität
- 10.11 Gapspannung und Generatorspannung unter Einfluß des Strahlstroms
- 10.12 Abstimmung der Kavität
- 10.13 Equivalentes Serienersatzbild
- 10.14 Equivalentes Parallelersatzbild
- 10.15 Equivalentes Parallelersatzbild zur Untersuchung der Generator-Resonator-Strahl-Wechselwirkung



10. Kavitäten

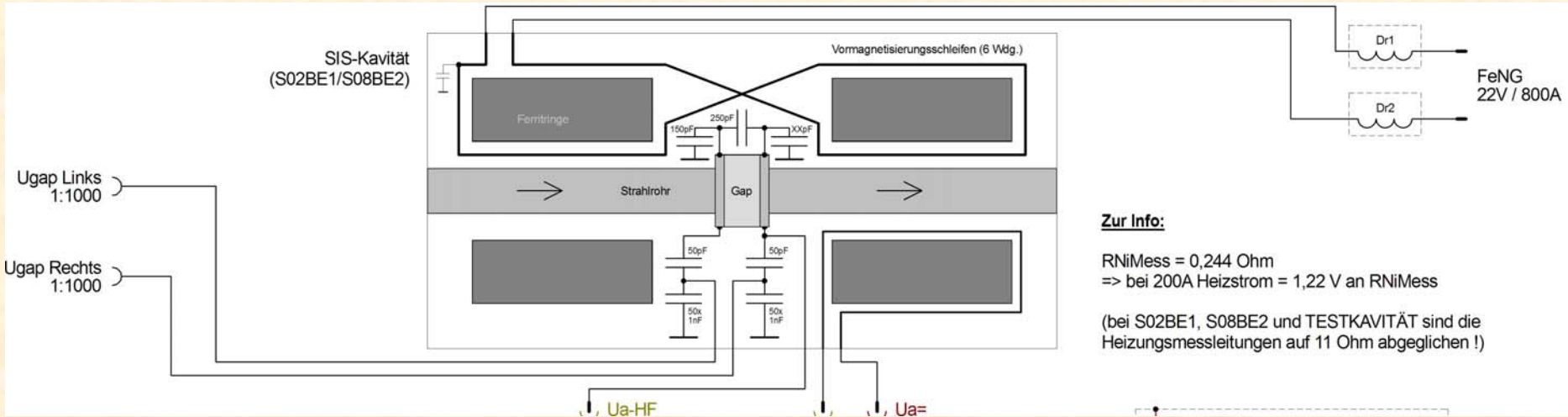
10.1 Die SIS18 Ferrit-Kavität





10. Kavitäten

10.2 Das Schema der SIS18 Ferrit-Kavität selbst

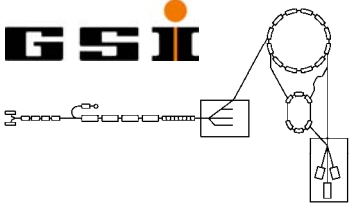


Zur Info:

RNiMess = 0,244 Ohm
=> bei 200A Heizstrom = 1,22 V an RNiMess

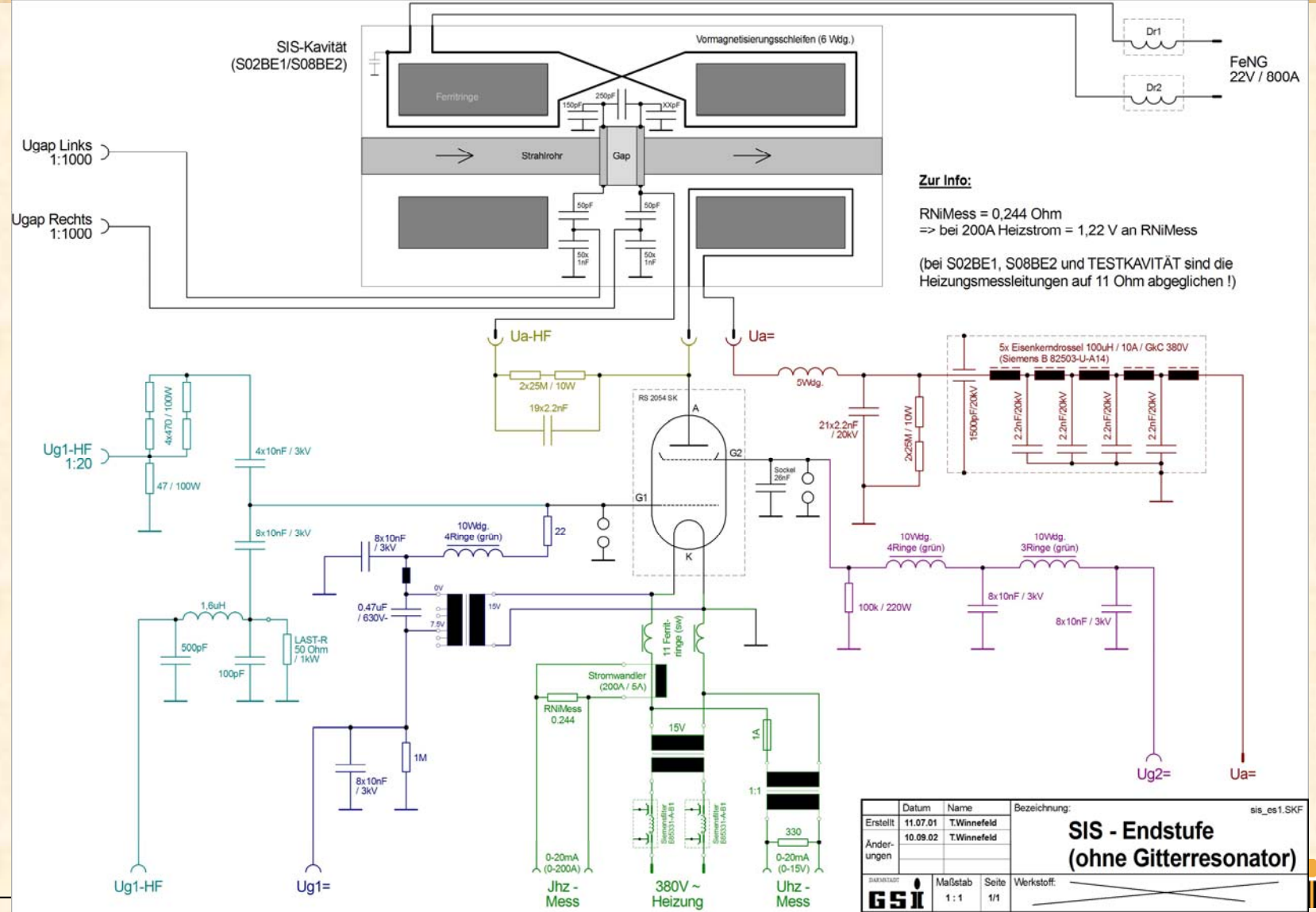
(bei S02BE1, S08BE2 und TESTKAVITÄT sind die Heizungsmessleitungen auf 11 Ohm abgeglichen !)

- 1) Die SIS18-Kavität besteht aus zwei Stapeln von je 32 Ferrit-Scheiben.
- 2) Die Ferrit-Ringe sind vom Typ Ferroxcube FXC 8C12m (Phillips in Eindhoven).
- 3) Abmessungen der Ferrit-Scheiben: $d_a=498$ mm, $d_i=270$ mm, $l=25$ mm.
- 4) Die beiden Ferrit-Stapel werden über 6 achtförmige Windungen vorbestromt.
- 5) Die Einkopplung der HF erfolgt gemischt, induktive- und kapazitive Einkopplung
- 6) Die Gapspannung jeder Gaphälfte wird über einen Gapspannungsteiler gemessen.
Teilverhältnis: 50 nF/ 50 pF = 1000
- 7) Die in die achtförmigen Vorbestromungswindungen eingekoppelte HF wird über 3 Blockkondensatoren von 15×5 nF = 75 nF abgeleitet.
- 8) Die Gapkapazität ist 250 pF, zusätzlich sind nochmal 2×150 pF parallel zum Gap geschaltet.



10. Kavitäten

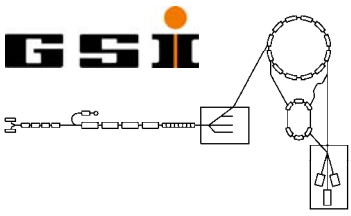
10.3 Das Schema der SIS18-Ferritkavität mit Tetrodenverstärker



Zur Info:

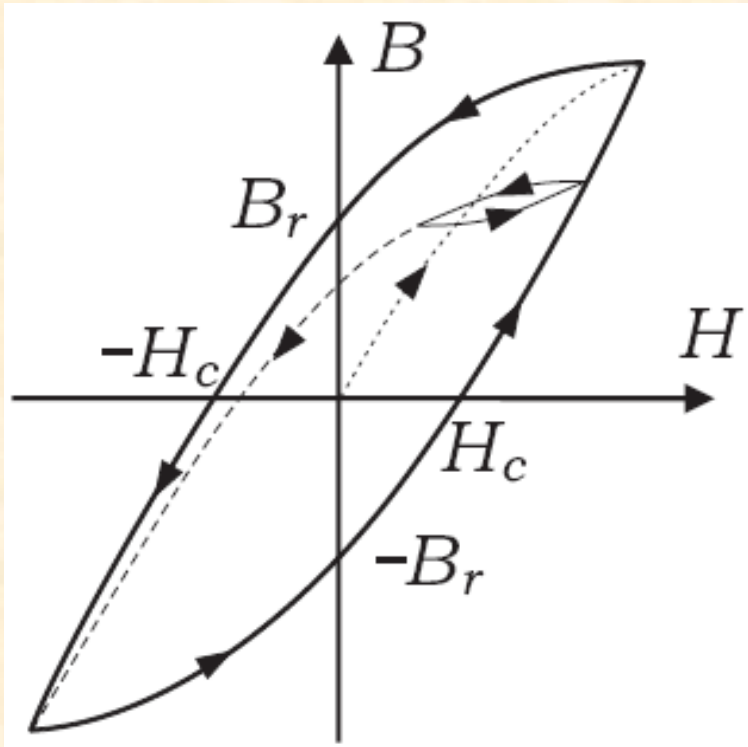
RNiMess = 0,244 Ohm
 => bei 200A Heizstrom = 1,22 V an RNiMess
 (bei S02BE1, S08BE2 und TESTKAVITÄT sind die Heizungsmeßleitungen auf 11 Ohm abgeglichen !)

Datum	Name	Bezeichnung:	sis_es1.SKF
Erstellt	11.07.01	T.Winnfeld	
Anderungen	10.09.02	T.Winnfeld	
SIS - Endstufe (ohne Gitterresonator)			
Maßstab	1:1	Seite	1/1
GSI		Werkstoff:	



10. Kavitäten

10.4 Zur Ferrit-Füllung der Kavität



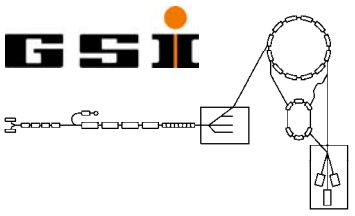
soft magnetic material:
 narrow hysteresis loop
 hard magnetic material:
 wide hysteresis loop
 (limits between soft and hard are not strict)

Bias current $\rightarrow H_{bias} \rightarrow$
 modification of
 differential permeability:

$$\mu_{\Delta} = \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

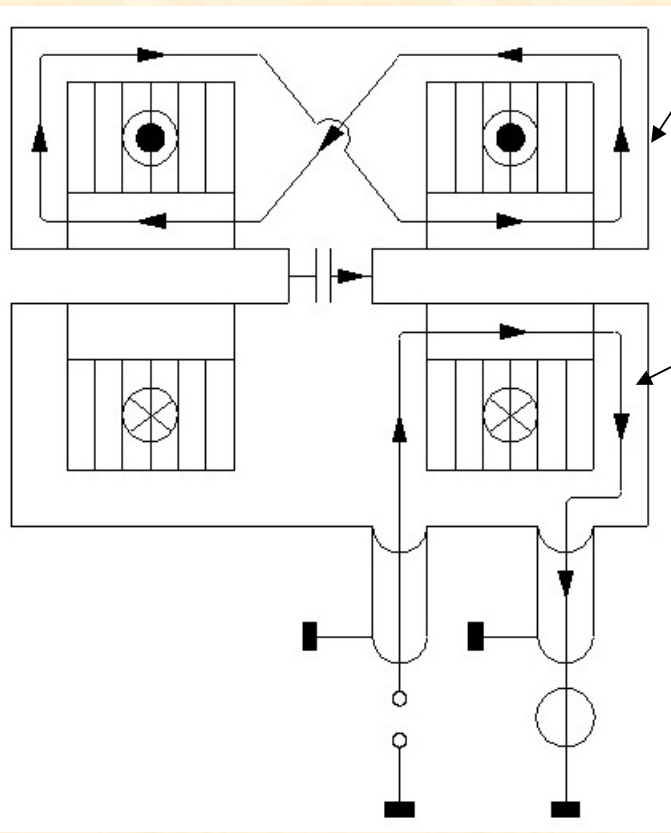
Index Δ is now left out...

H_c : coercive magnetizing field
 B_r : residual induction



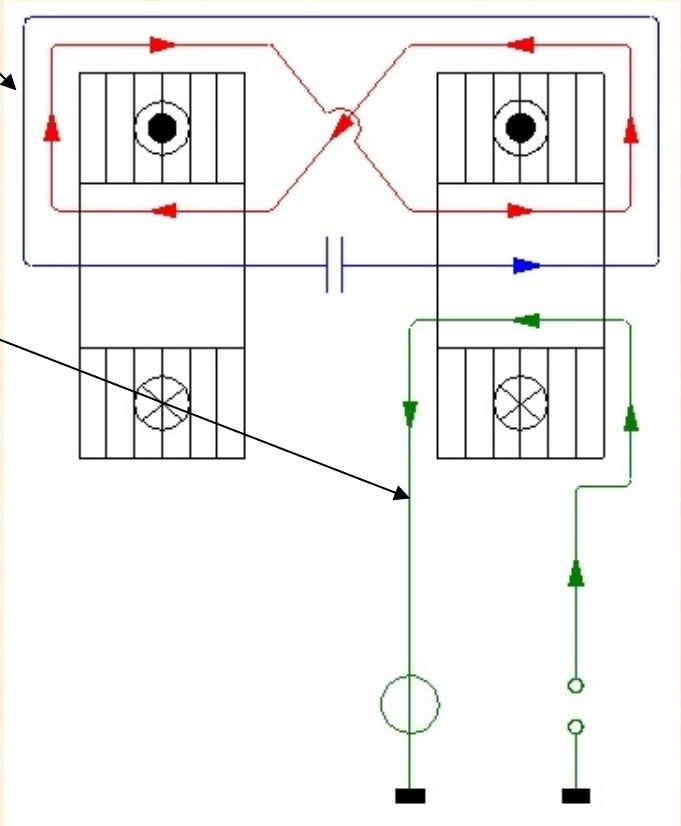
10. Kavitäten

10.5 Ein vereinfachtes Kavitätenmodell zur Auswertung der ersten und zweiten Maxwellschen Gleichung

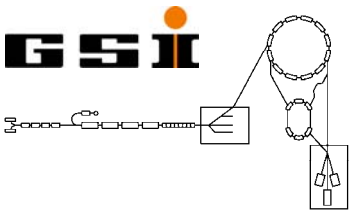


Kavitätengehäuse mit keramischem Gap wird durch eine einzige Windung mit Gapkapazität vereinfacht

Einkoppelschleife koppelt die HF vom Generator in die Kavität ein

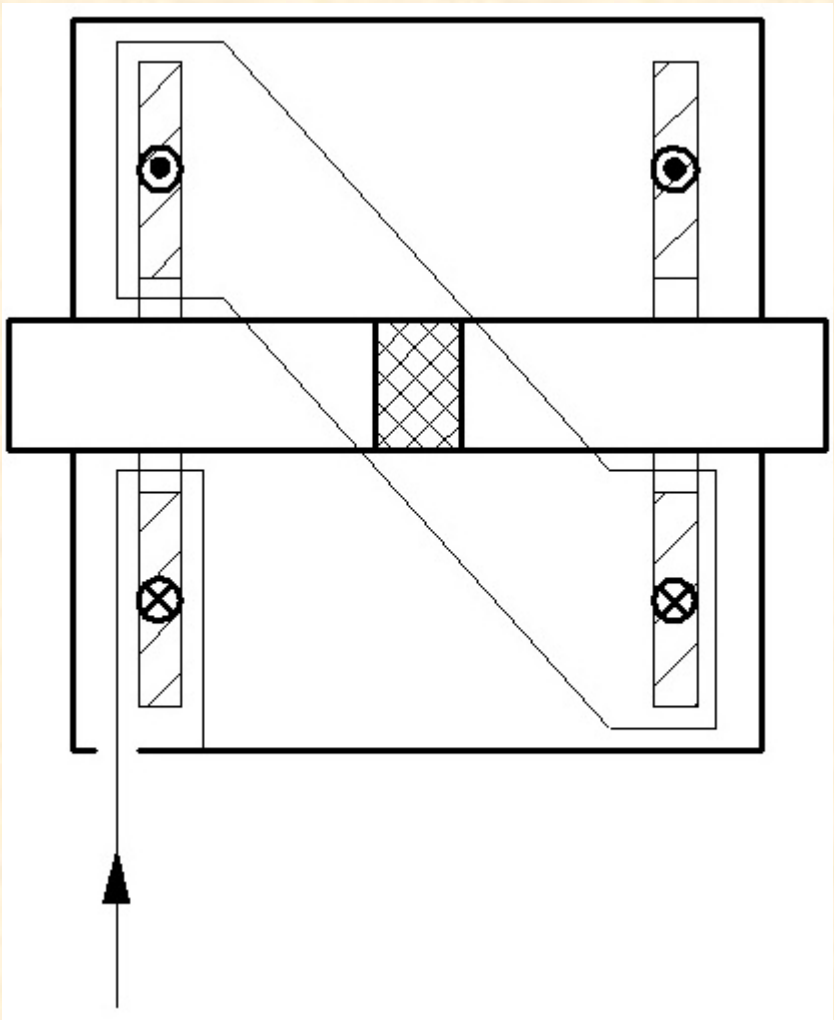
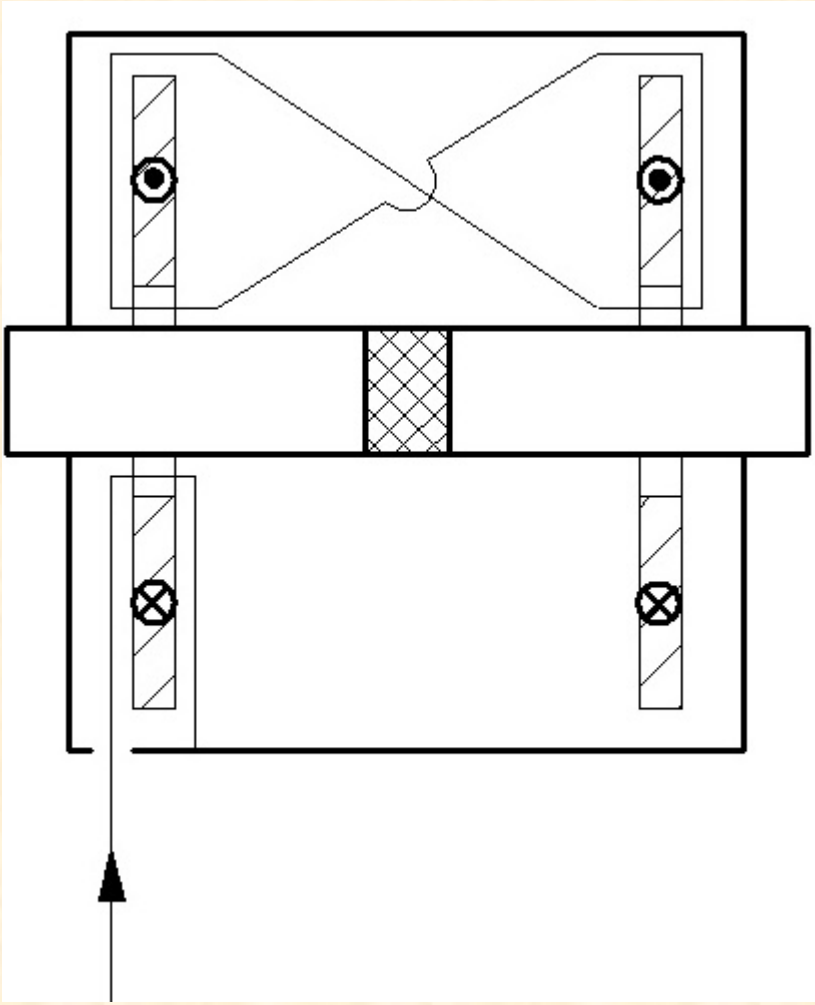


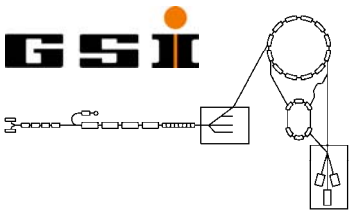
Die achtförmige Schleife sorgt dafür, dass beide Ringkernstapel fest miteinander verkoppelt werden und die gleiche Flussrichtung zueinander haben.



10. Kavitäten

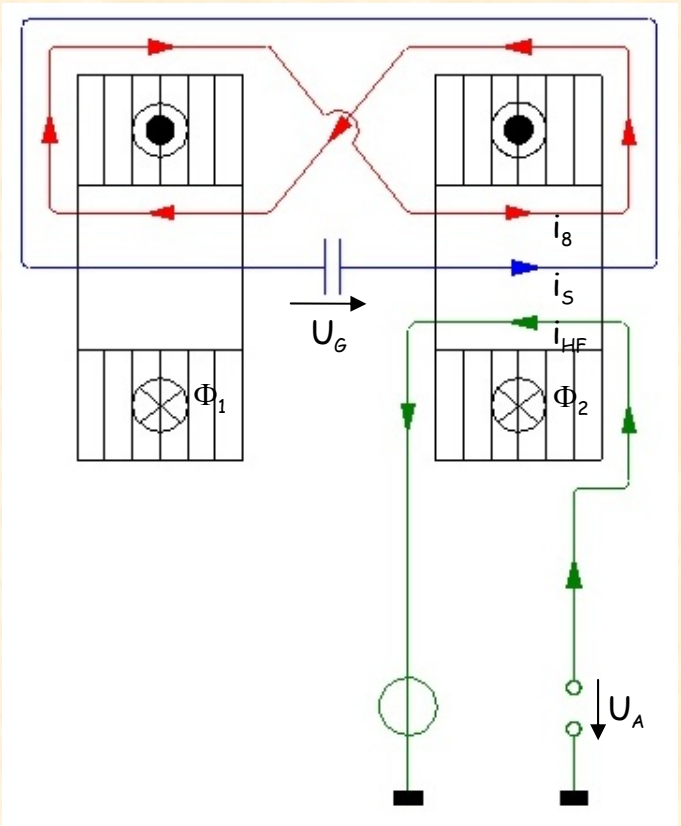
10.6 Zur Erklärung der Funktion der Achterschleife





10. Kavitäten

10.7 Die Auswertung der zweiten Maxwellschen Gleichung am vereinfachten Kavitätenmodell



Wir wenden zuerst die zweite Maxwellsche Gleichung auf den blauen Umlaufweg an:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = U = -i\omega \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = -i\omega\phi$$

An der Gap-Kapazität ist die Schleife unterbrochen und es ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$U_G = -i\omega(\phi_1 + \phi_2)$$

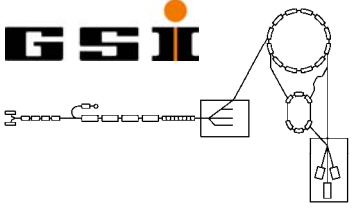
Bei der achtförmigen Schleife gibt es keine Unterbrechungen und daher wird auch keine Spannung induziert, jedoch sind die Flüsse entgegengesetzt gerichtet. Es muss also gelten:

$$-i\omega(\phi_1 - \phi_2) = 0 \qquad \phi_1 = \phi_2 = \phi$$

Für die Gap-Spannung heißt das also:

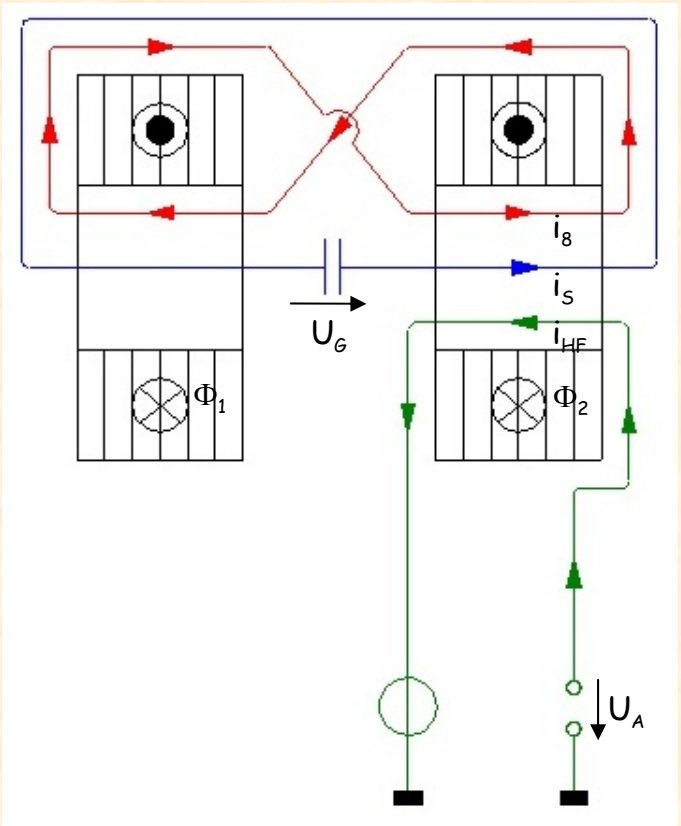
$$U_G = -i\omega 2\phi$$

Die achtförmige Schleife erzwingt also einen Fluß durch beide Ringkernstapel in gleicher Richtung.



10. Kavitäten

10.7 Die Auswertung der zweiten Maxwell'schen Gleichung am vereinfachten Kavitätenmodell



Wir wenden nun die zweite Maxwell'sche Gleichung auf den grünen Umlaufweg an:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = U = -i\omega \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = -i\omega\phi$$

An der HF-Generator ist die Schleife unterbrochen und es ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$U_A = -i\omega\phi_2$$

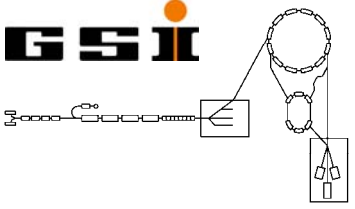
und wegen $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ gilt auch

$$U_A = -i\omega\phi$$

Die Gap-Spannung ist also die doppelte Generator-Spannung:

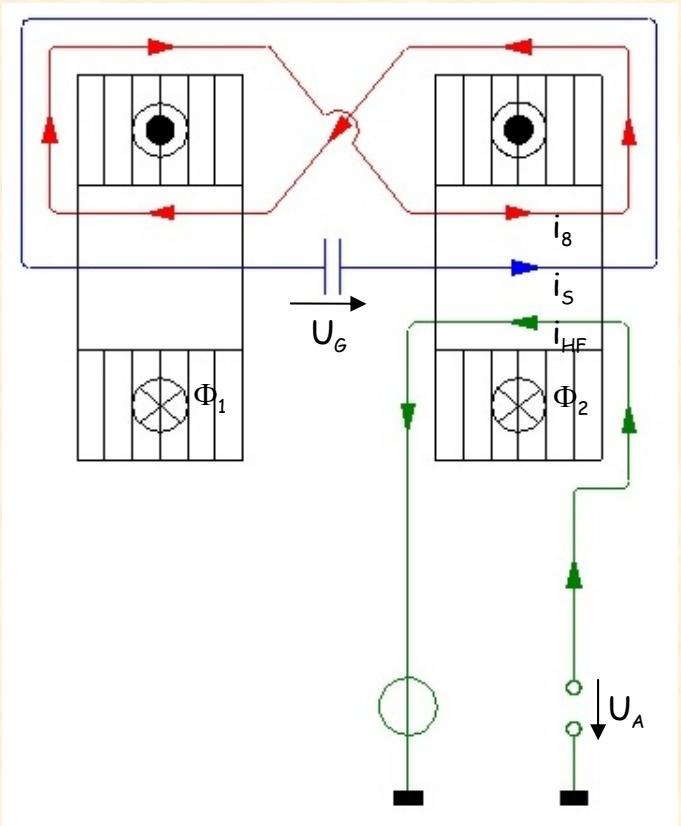
$$U_G = 2U_A$$

Die achtförmige Schleife erzwingt also einen Fluß durch beide Ringkernstapel in gleicher Richtung.



10. Kavitäten

10.8 Die Auswertung der ersten Maxwellschen Gleichung am vereinfachten Kavitätenmodell



Wir wenden nun die erste Maxwellsche Gleichung an:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{ges}$$

Beim rechten Ringkernstapel ergibt sich

$$H_\phi 2\pi r = -i_A + i_S + i_8$$

Da alle Ströme mit positivem Vorzeichen durch die Integrationsfläche gehen.

$$H_\phi 2\pi r = i_S - i_8$$

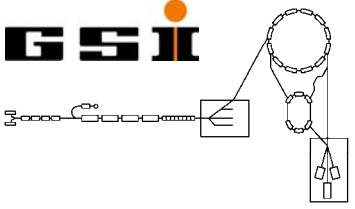
Zieht man beide Gleichungen voneinander ab, so erhält man

$$i_{HF} + 2i_8 = 0$$

was auf das Ergebnis führt:

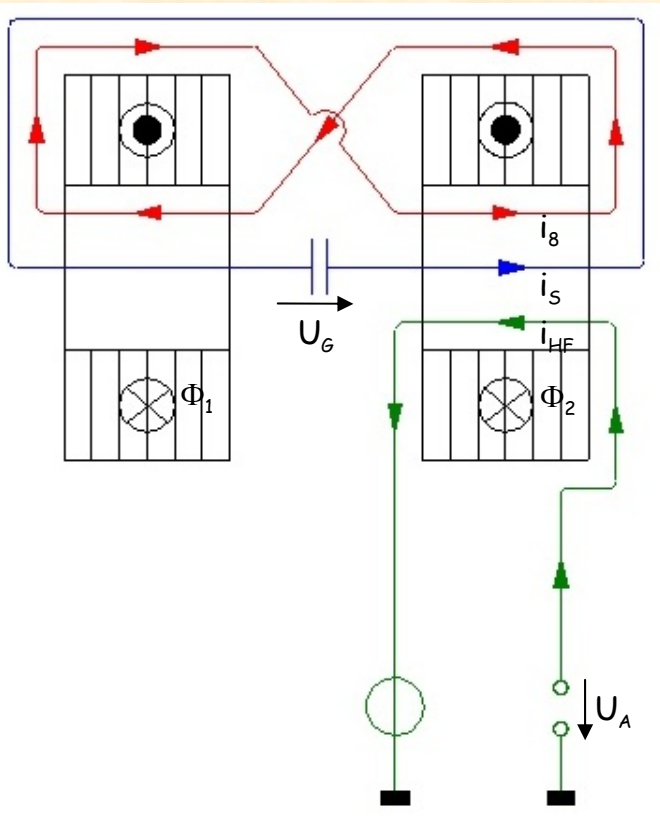
$$i_8 = \frac{i_A}{2}$$

Das heißt, die achtförmige Schleife führt den halben HF-Strom.



10. Kavitäten

10.9 Gapspannung und die Kavitätenimpedanz



Für das azimuthale Magnetfeld hatten wir den Ausdruck

$$H_\varphi 2\pi r = -i_{HF} + i_s + i_8 = -\frac{i_{HF}}{2} + i_s$$

ermittelt. Den können wir jetzt benutzen um den Fluß auszurechnen

$$U_G = -i\omega 2\phi = -i\omega 2 \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$= -i\omega 2 \frac{\mu_0 (\mu' - i\mu'') l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \left(-\frac{i_{HF}}{2} + i_s\right) = -2i_{ges} Z$$

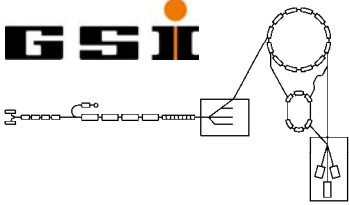
Damit hat der Ringkernstapel jetzt ein serielles Ersatzbild bekommen mit folgenden Größen:

$$Z = i\omega L + R \qquad L = \frac{\mu_0 \mu' l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \qquad R = \frac{\omega \mu_0 \mu'' l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

Jetzt kann man die Kavitätenimpedanz ermitteln:

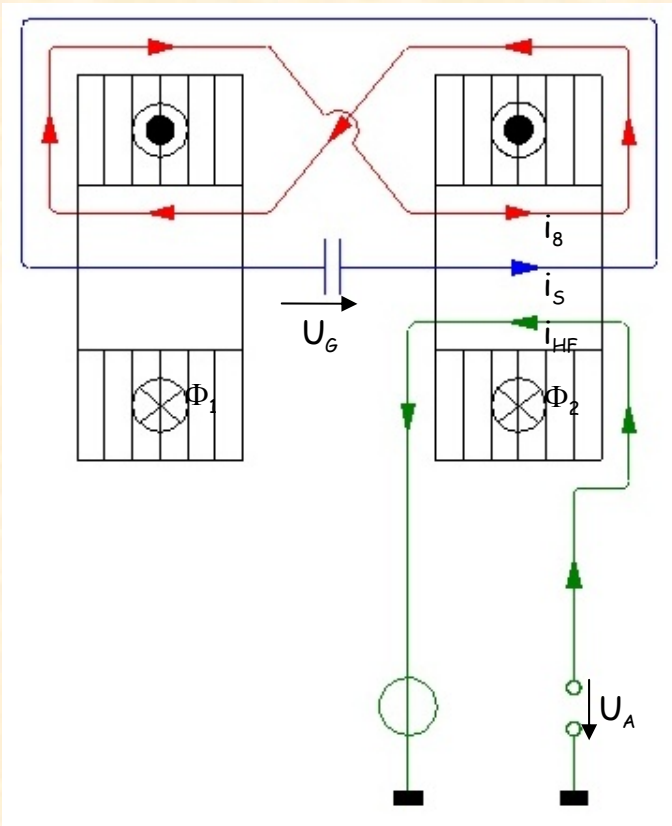
$$U_G = -2Z \left(-\frac{i_{HF}}{2} + i_s\right) = -2Z \left(-\frac{i_{HF}}{2} + \frac{U_G}{Z_G}\right) \Rightarrow$$

$$Z_{Kav} = \frac{U_G}{i_{HF}} = \frac{Z}{1 + 2 \frac{Z}{Z_G}} = \frac{R + i\omega L}{1 + 2i\omega C_G (R + i\omega L)}$$



10. Kavitäten

10.10 Die Eingangsimpedanz der Kavität

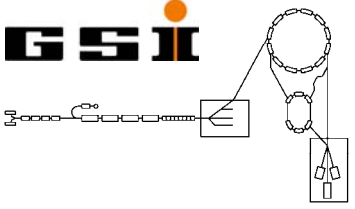


Eine wichtige Größe ist die Eingangsimpedanz, die der HF-Generator, bzw. die Röhre (Tetrode) "sieht":

$$2U_A = U_G = -2Z \left(-\frac{i_{HF}}{2} + i_s \right) = -2Z \left(-\frac{i_{HF}}{2} + \frac{2U_A}{Z_G} \right)$$

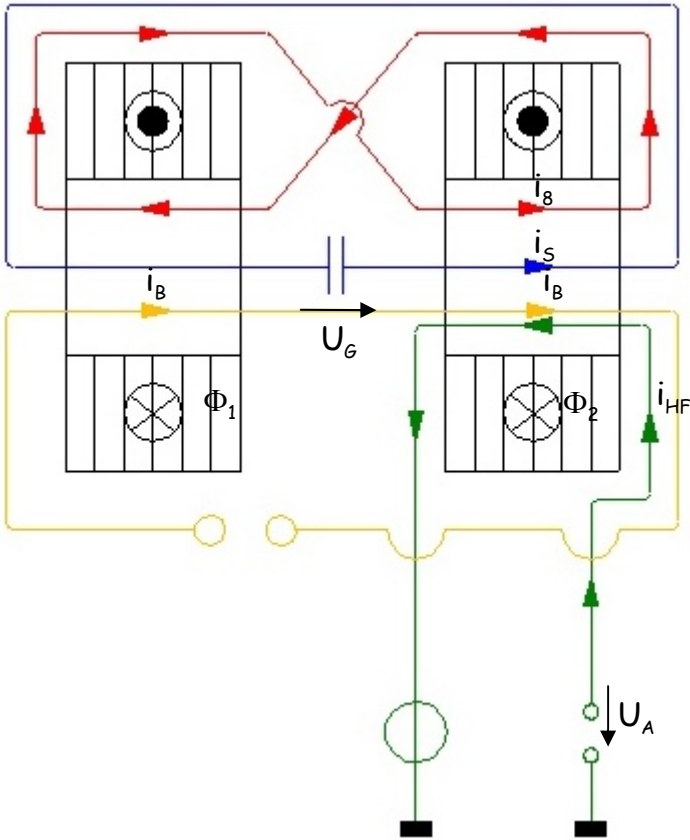
$$Z_E = \frac{U_A}{i_{HF}} = \frac{1}{2} \frac{Z}{\left(1 + 2 \frac{Z}{Z_G} \right)}$$

Das ist eine wichtige Größe die man kennen muss, denn die Tetrode (hier als Spannungsgenerator vereinfacht) sollte mit ihrem Innenwiderstand zur Eingangsimpedanz passen, denn sonst wird der Wirkungsgrad bei der HF-Erzeugung schlecht.



10. Kavitäten

10.11 Gapspannung und Generatorspannung unter Einfluß des Strahlstroms



Bei Berücksichtigung des Strahlstroms müssen wir den Gesamtstrom zur Berechnung der Gapspannung modifizieren:

$$U_G = -i\omega 2\phi = -2i\omega \frac{\mu_0 (\mu' - i\mu'') l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) i_{ges} = -2Z(i_B - i_{HF} + i_8 + i_S)$$

Folgendes ist bereits bekannt: $i_8 = \frac{i_{HF}}{2}$ $i_S = \frac{U_G}{Z_G}$

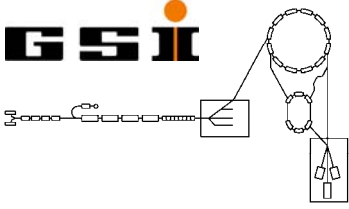
Dann ergibt sich eine modifizierte Gleichung für die Gapspannung:

$$U_G = -2Z\left(i_B - \frac{i_{HF}}{2} + \frac{U_G}{Z_G}\right)$$

Dann kann man sowohl den Einfluß des Strahlstroms auf die Gapspannung, als auch auf die Generatorspannung berechnen.

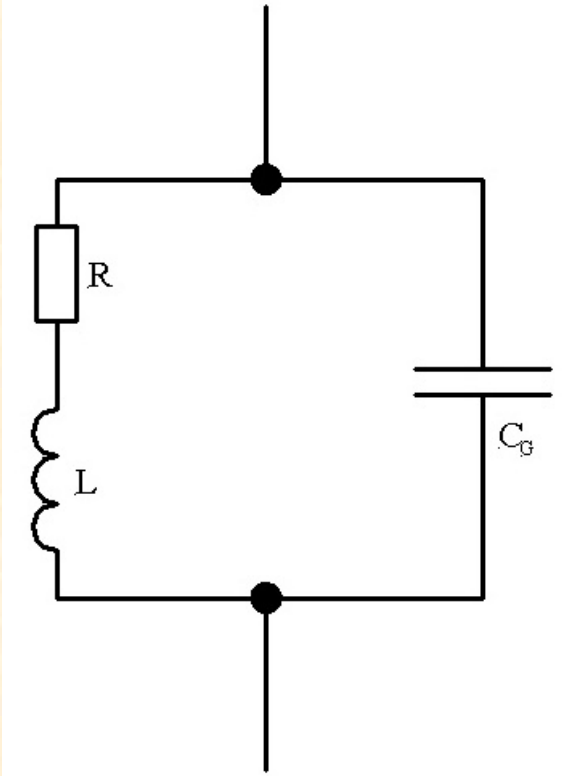
$$U_G = \frac{2Z\left(\frac{i_{HF}}{2} - i_B\right)}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} = \frac{Z}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} i_{HF} - \frac{2Z}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} i_B = Z_{Kav} i_{HF} - 2Z_{Kav} i_B$$

$$U_A = \frac{Z\left(\frac{i_{HF}}{2} - i_B\right)}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} = \frac{1}{2} \frac{Z}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} i_{HF} - \frac{Z}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} i_B = \frac{1}{2} Z_{Kav} i_{HF} - Z_{Kav} i_B$$



10. Kavitäten

10.12 Abstimmung der Kavität



Im folgenden wird angenommen, dass der Strahlstrom vernachlässigbar ist. Für die Abstimmung der Kavität darf nicht einfach $2\omega^2 LC = 1$, wie üblich gesetzt werden. Es sorgt eine Eigenfrequenzregelung dafür, dass Z_{Kav} reell wird. Wegen

$$Z_{Kav} = \frac{Z}{1 + 2 \frac{Z}{Z_G}} = \frac{R + j\omega L \left(1 - \omega^2 2LC_G - 2 \frac{C_G}{L} R^2 \right)}{\left(1 - \omega^2 2LC \right)^2 + \left(\omega 2CR \right)^2}$$

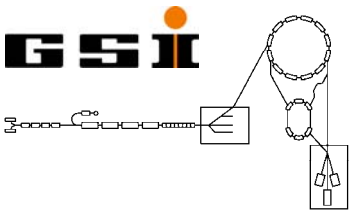
muß für eine abgestimmte Kavität die Bedingung gelten:

$$1 - \omega^2 2LC_G - 2 \frac{C_G}{L} R^2 = 0$$

$$2(\omega L)^2 + 2R^2 = \frac{L}{C_G}$$

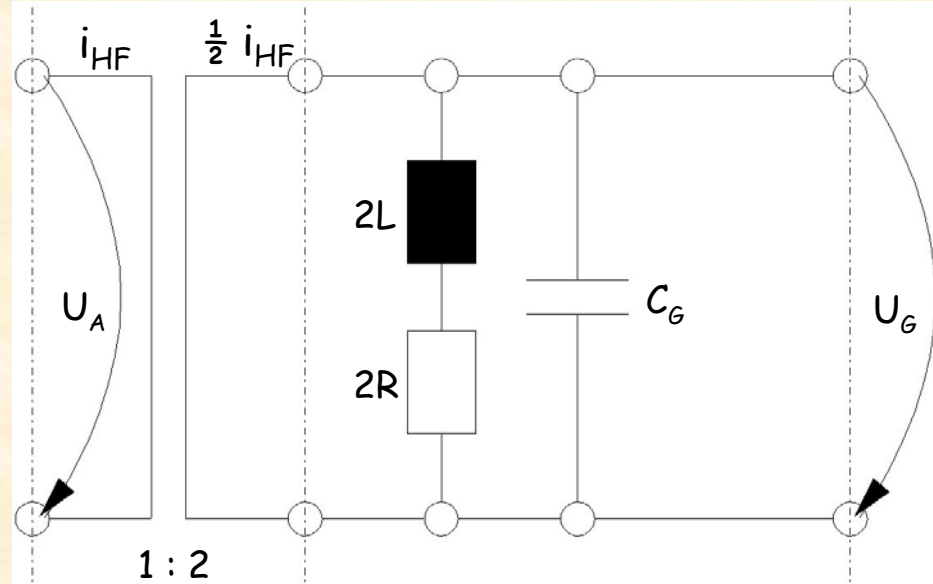
Im abgestimmten Fall gilt wegen obiger Gleichung für die Impedanz:

$$Z_{Kav} = \frac{L}{2RC_G} = R + \frac{\omega^2 L^2}{R} = R(1 + Q^2)$$



10. Kavitäten

10.13 Equivalentes Serienerstattbild



Wir müssen bei der Einführung eines equivalenten Ersatzbildes folgendes beachten:

- 1) Der HF-Generator muß die Eingangsimpedanz der Kavität sehen.
- 2) Die Kavitätenimpedanz Z_{Kav} multipliziert mit dem HF-Strom i_{HF} muß die Gapspannung U_G ergeben.

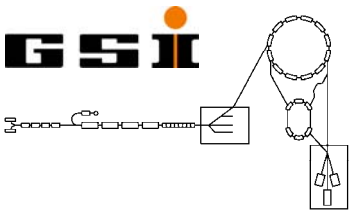
Die Kavitätenimpedanz läßt sich folgendermaßen durch eine Parallelschaltung ausdrücken:

$$Z_{Kav} = \frac{Z}{1 + 2 \frac{Z}{Z_G}} = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_G (2Z)}{Z_G + 2Z} \right) = \frac{1}{2} (Z_G \parallel 2Z)$$

Das gleiche läßt sich auch mit der Eingangsimpedanz machen:

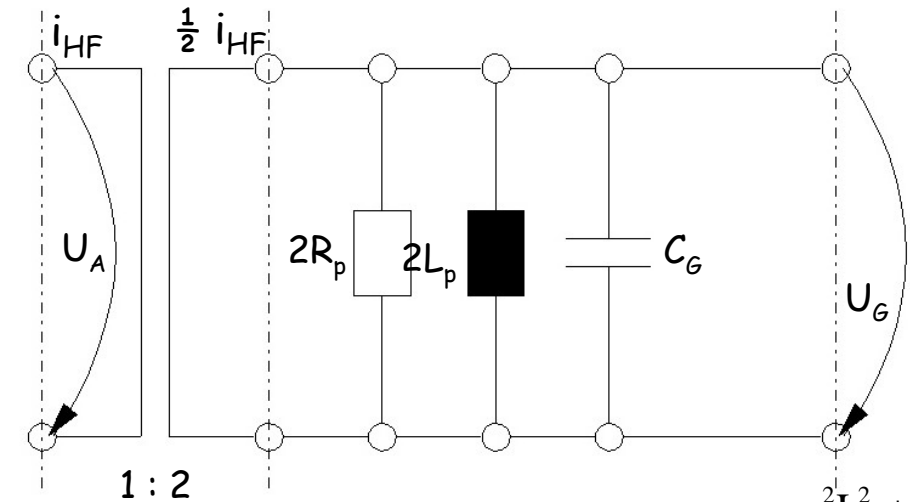
$$Z_E = \frac{1}{2} \frac{Z}{\left(1 + 2 \frac{Z}{Z_G} \right)} = \frac{1}{4} \frac{(Z_G 2Z)}{Z_G + 2Z} = \frac{1}{4} (Z_G \parallel 2Z)$$

Durch die Einführung eines verlustlosen Transformators mit dem Übersetzungsverhältnis 1 : 2 ergibt sich schließlich zwanglos das oben stehende equivalente Ersatzbild.



10. Kavitäten

10.14 Equivalentes Parallelersatzbild



Die Umrechnung vom Serienkreis in den Parallelkreis erfolgt durch die Überlegung:

$$\frac{1}{Z_S} = \frac{1}{i\omega L_S + R_S} = \frac{1}{i\omega L_P} + \frac{1}{R_P}$$

Beide Impedanzen, ob parallel oder seriell, müssen identisch sein, das heißt, sowohl Realteil als auch Imaginärteil müssen identisch sein. Es müssen also die beiden Gleichungen gelten:

Aus dem Realteil ergibt sich:

$$R_P = \frac{\omega^2 L_S^2 + R_S^2}{R_S} = R_S \left(1 + \frac{\omega^2 L_S^2}{R_S^2} \right) = R_S (1 + Q^2)$$

Aus dem Imaginärteil ergibt sich:

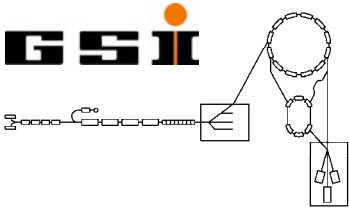
$$L_P = \frac{\omega^2 L_S^2 + R_S^2}{\omega^2 L_S} = L_S \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)$$

$$Q = \omega \frac{L_S}{R_S} = \frac{R_P}{\omega L_P}$$

$$Z_P = \frac{2R_P}{1 + iQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{2R_P}{1 + iQ_0 \Omega}$$

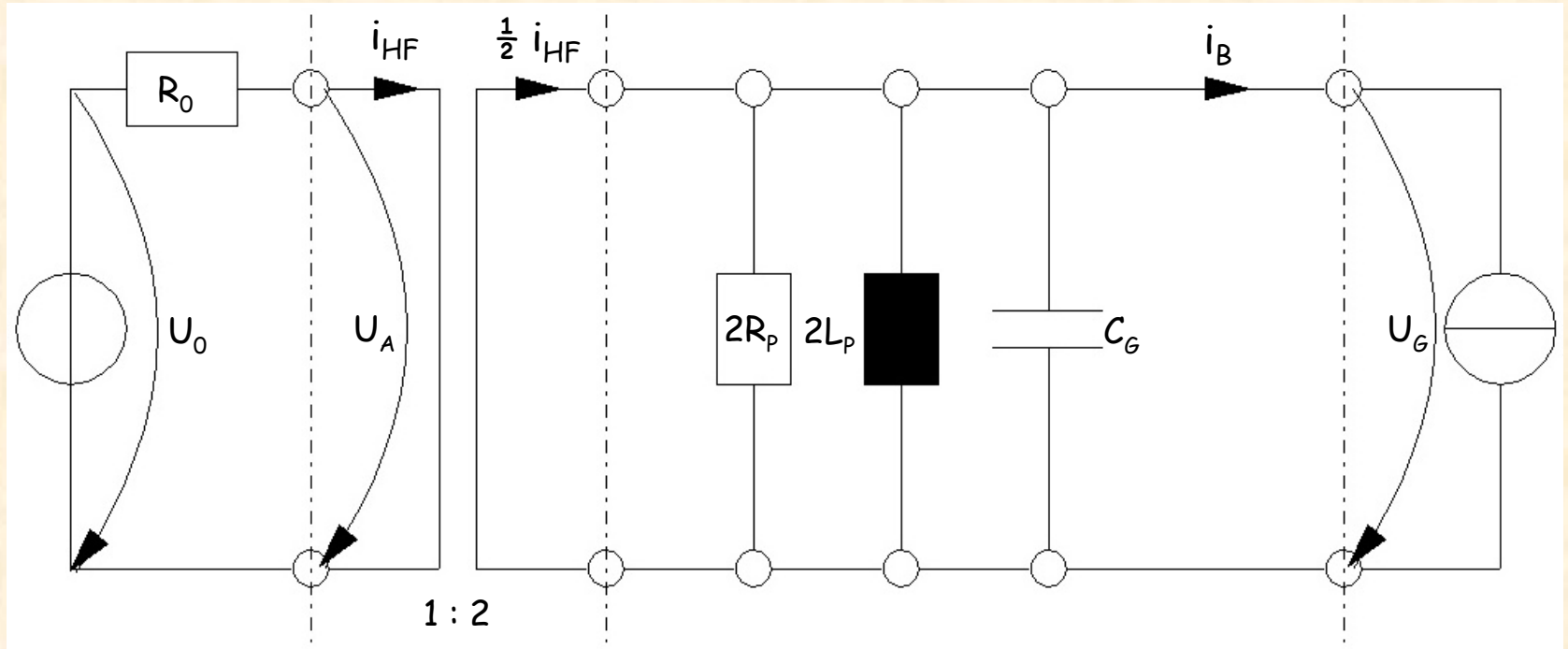
$$Q_0 = \omega_0 2R_P C_G$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2L_P C_G}}$$



10. Kavitäten

10.15 Equivalentes Parallelersatzbild zur Untersuchung der Generator-Resonator-Strahl-Wechselwirkung



Wir haben nun unser Ziel erreicht. Zur Untersuchung der Strahl-Generator-Resonator-Wechselwirkung steht uns oben stehendes equivalentes Ersatzbild zur Verfügung. Der Strahlstrom wird durch eine ideale Stromquelle dargestellt. Der Strahl nimmt natürlich auch Leistung während des Beschleunigungsvorgangs, aber gegenwärtig vernachlässigen wir das noch. Der Generator wird durch eine ideale Spannungsquelle mit Innenwiderstand dargestellt, was bei der HF-Erzeugung mit Vacuumröhren, wie zum Beispiel Tetroden, der Wahrheit am nächsten kommt. Bei einer Speisung durch ein Klystron wäre eher die ideale Stromquelle mit Innenwiderstand das Mittel der Wahl.