

4.) Emittanz- und Phasenraumkonzept

4.1. Hillsche Differentialgleichung

In der letzten Vorlesung hatten wir die Bewegungsgleichungen in einer Ringmaschine mit

$$\begin{aligned}x'' + \left(k_m^2(s) + \frac{1}{\rho^2(s)} \right) x &= \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p_0} \\y'' - k_m^2(s) y &= 0 \\l' &= 1 + \frac{x}{\rho(s)}\end{aligned}$$

kennengelernt. Um die Bewegungsgleichung etwas zu veranschaulichen gehen wir von einer vereinfachten Version aus, bei der $\Delta p/p=0$ ist (Monoenergetischer Strahl, keine Dispersion).

$$r'' + K(s) \cdot r = 0 \quad r = x, y \quad (4.1)$$

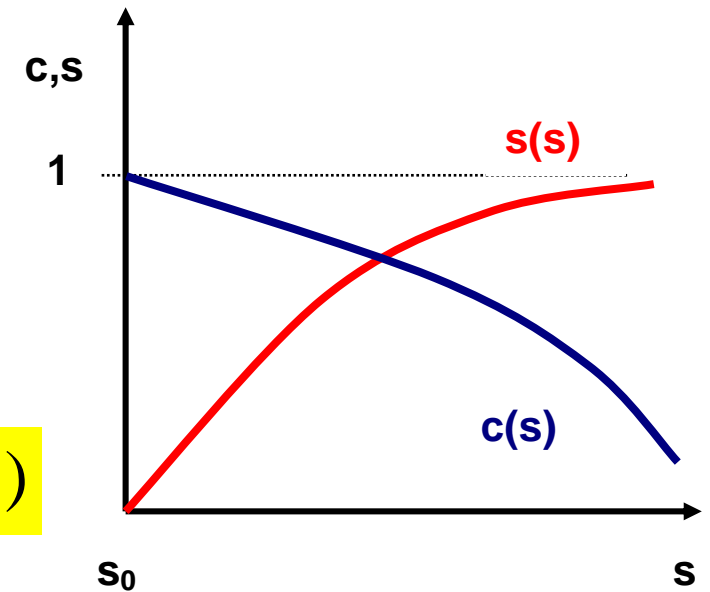
Diese Art der Differentialgleichung nennt man **Hillsche Differentialgleichung**. Dies ist eine lineare DGL zweiter Ordnung und besitzt zwei linear unabhängige Lösungen, aus denen sich jede beliebige Lösung durch Linearkombinationen darstellen lässt. Welche Lösung vorliegt wird durch die Anfangsbedingungen $r(s_0) = r_0$; $r'(s_0) = r'_0$ und die Eigenschaften der Strahllinienelemente bestimmt.

Dabei werden die Koordinaten des Teilchens an der Stelle s_0 ($r_0; r'_0$) in die Koordinaten an der Stelle s ($r; r'$) transformiert durch die Lösungen der Hillschen DGL.

$$\begin{aligned} r(s) &= c(s) \cdot r_0 + s(s) \cdot r'_0 & c(s_0) &= 1 & ; & s(s_0) = 0 \\ r'(s) &= c'(s) \cdot r_0 + s'(s) \cdot r'_0 & \rightarrow & c'(s_0) = 0 & ; & s'(s_0) = 1 \end{aligned}$$

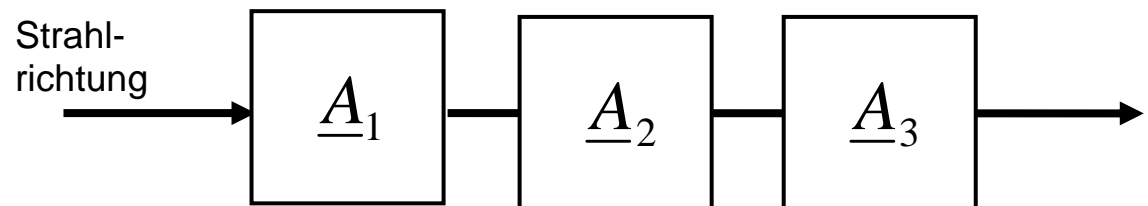
Man nennt $c(s)$ und $s(s)$ cosinus- und sinusartige Funktionen.

$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} c(s) & s(s) \\ c'(s) & s'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_{s_0} \rightarrow \underline{\vec{r}}(s) = \underline{A}(s) \cdot \underline{\vec{r}}(s_0)$$



Der Strahltransport kann durch eine Folge diskreter Elemente[^] beschrieben werden, wobei jedes Element durch eine Strahltransport- und Strahltransfermatrix $\underline{A}_i(z)$ charakterisiert ist.

$$\underline{B} = \underline{A}_3 \circ \underline{A}_2 \circ \underline{A}_1$$

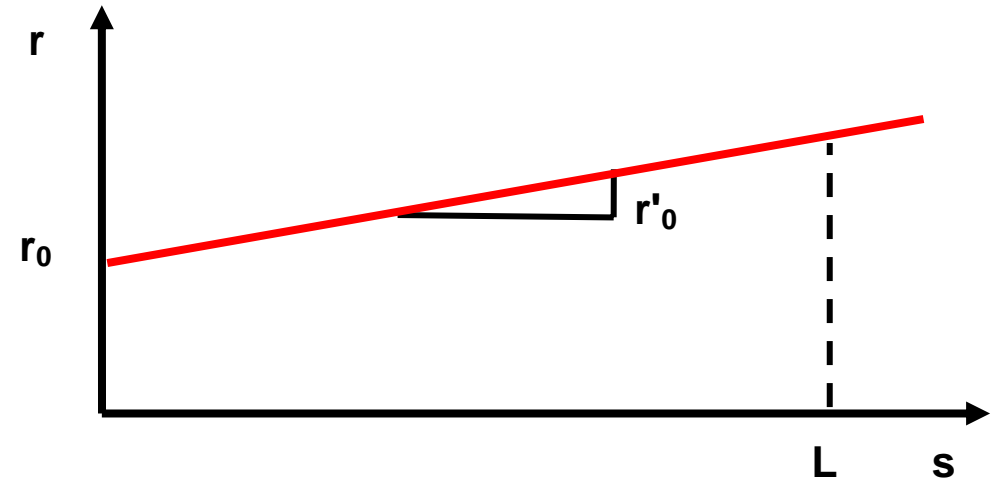


Einfaches Beispiel, die **Drift**:

$$r(s) = r_0 + r'_0 \cdot s \Rightarrow c(s) = 1; s(s) = s$$

$$r'(s) = r'_0 \Rightarrow c'(s) = 0; s'(s) = 1$$

$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_{s0} \rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



bei Drift der Länge L. Betrachtet man nun die Bewegung in zwei transversalen Dimensionen x,y, so erhält man eine 4x4 Matrix:

$$\underline{R}_{x,y} = \begin{pmatrix} 1 & L_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_s = \underline{R}_{x,y} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{s0}$$

Allgemein in drei Dimensionen erhält man dann allgemein für die Strahltransfermatrix:

$$\underline{R}_{x,y,s} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{61} & R_{62} & \dots & R_{66} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{pmatrix}_s = \underline{R}_{x,y,s} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{pmatrix}_{s_0} \quad \text{und} \quad \delta \hat{=} \delta p / p_{ref}$$

4.2. Phasenraumbetrachtung

Bisher haben wir die Bewegung von einzelnen Teilchen betrachtet. Nun wollen wir die Bewegung von Teilchenensembeln betrachten. Wie wir gesehen haben, spielen der Ort eines Teilchens (Entfernung von der Strahlachse) und der transversale Impuls (Winkel zur Strahlachse) bei der Beschreibung der Strahloptik eine wichtige Rolle. Betrachten wir die Determinante der Strahltransportmatrix so gilt:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} c(s) & s(s) \\ c'(s) & s'(s) \end{pmatrix} \quad \blacktriangleright \quad W = \begin{vmatrix} c(s) & s(s) \\ c'(s) & s'(s) \end{vmatrix} = c \cdot s' - c' \cdot s, \quad \frac{dW}{ds} = cs'' - c''s \quad (4.2)$$

W = Wronskideterminante

Man kann nun zeigen, dass sich jede allgemeine DGL 2. Ordnung: $u'' + f(s) \cdot u' + g(s) \cdot u = 0$

Mit dem Ansatz $u = r \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int f(s) ds\right)$ in die Gleichung (4.1) transformieren kann. Daher gilt:

$$c'' + f(s) \cdot c' + g(s) \cdot c = 0$$

$$s'' + f(s) \cdot s' + g(s) \cdot s = 0 \quad \rightarrow \quad (cs'' - c''s) + f(s)(cs' - c's) = 0$$

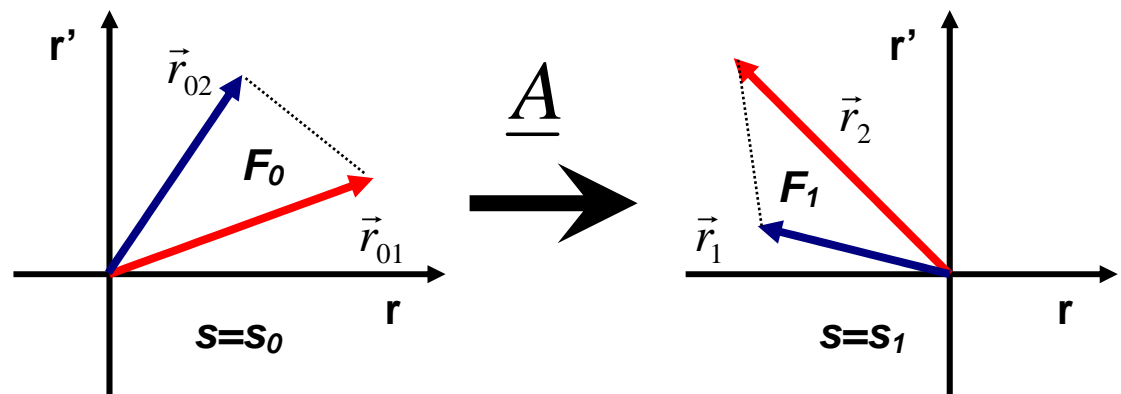
Damit gilt für W:
$$\frac{dW}{ds} = cs'' - c''s = -f(s) \cdot W \Rightarrow W = W_0 \exp\left[-\int_{s_0}^s f(s) ds\right] \quad (4.3)$$

W ändert sich, wenn der Dämpfungsterm $f(s) \neq 0$ ist. Da c und s normiert sind, muss $W_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ sein. Ist die Pseudodämpfung $f(s) = 0$ bleibt $W = 1$. $f(s)$ ist z.B. ungleich Null bei Beschleunigung. Es gilt also $W = 1$, wenn keine Beschleunigung vorliegt. Wie transformiert sich nun eine Fläche im Phasenraum in dem wir die Orts und die Winkelkoordinate (r, r') auftragen:

$$F_0 = \frac{1}{2} |\vec{r}_{01} \times \vec{r}_{02}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} r_{01} & r_{02} \\ r'_{01} & r'_{02} \end{vmatrix}$$

$$F_1 = \frac{1}{2} |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r'_1 & r'_2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} c & s \\ c' & s' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_{01} & r_{02} \\ r'_{01} & r'_{02} \end{vmatrix} = W \cdot F_0 \quad (4.4)$$



Die Phasenraumfläche bleibt erhalten, wenn keine Pseudodämpfung vorliegt. Wir haben gesehen, dass sich die Phasenraumfläche unter einer Transformation ohne Dämpfung erhalten bleibt. Da man jede Fläche durch solche Dreiecke annähern kann, transformiert sich so jede beliebige Phasenraumfläche.

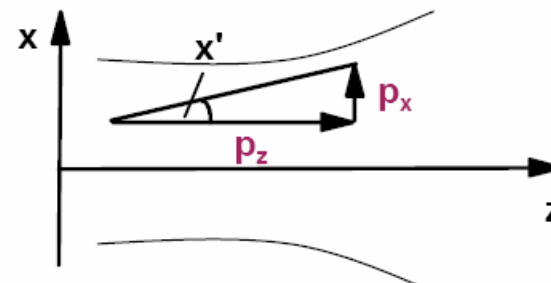
Dieses Prinzip ist viel allgemeiner und wird bestimmt durch den **Satz von Liouville**. Dieser Satz lässt sich direkt aus den Hamilton-Jakobischen DGL's herleiten:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\dot{q}_i$$

Wobei q_i, p_i die Teilchenkoordinaten im Phasenraum sind. Sie gelten für jedes mechanische System, in welchem keine geschwindigkeitsabhängigen Kräfte auftreten, wo v in Richtung der Kraft zeigt. D.h. die Lorentzkraft fällt nicht darunter. Die DGL's gelten nicht für dissipative Kräfte!

Die Teilchen eines Ensembles belegen mit ihren verschiedenen Anfangsbedingungen \vec{r}_{0i} ein gewisses Flächenstück in der r - r' -Ebene bei $s=s_0$. Dieses transformiert sich gemäß (4.4). Damit transformiert sich die Dichte der Teilchen gemäß $1/W$ ($W = \text{Wert der Wronskideterminante}$).

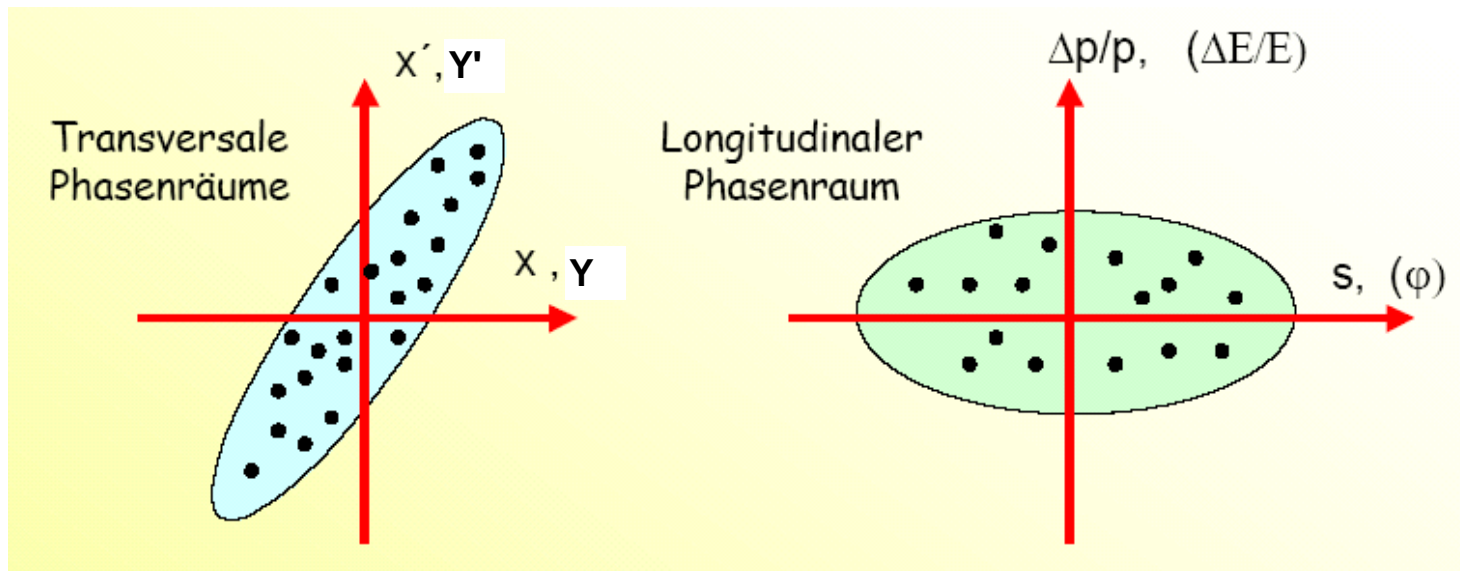
Im Allgemeinen werden Orts- und Impulskoordinaten als Phasenraum dargestellt. Bei der Strahloptik wird jedoch auf den longitudinalen Impuls normiert und daher mit Winkeln gearbeitet.



$$x' = \frac{p_x}{p_z}$$

4.3. Emittanz und Phasenellipse

Zerfällt die 3-dim. Bewegungsgleichung eines Teilchens in 3 unabhängige Bewegungsgleichungen in den Koordinaten x, y, s , so sind die Phasen-Unterräume voneinander entkoppelt. Die Fläche, die die Teilchen einnehmen, ist ein Maß für die Qualität des Strahls. Diese Phasenraumfläche ist proportional zur sogenannten **Emittanz** des Strahls.



Die Phasenraumfläche, welche die Teilchen eines Strahls im Unterraum x, y oder s einnehmen, beträgt

$$A_{xx'} = \frac{1}{p_s} \iint dx \cdot dp_x = \frac{1}{\gamma m_0 \beta c} \iint dx \cdot dp_x = \iint dx \cdot dx' \quad \text{mit} \quad x' = \frac{dx}{ds} = \tan\left(\frac{p_x}{p_s}\right) \approx \frac{p_x}{p_s}$$

Sind die Koordinaten voneinander entkoppelt, so bleiben die 2-dim-Phasenräume nach den **Satz von Liouville** konstant. Dies gilt auch für $A_{xx'}$, wenn keine Beschleunigung stattfindet also $\beta \cdot \gamma = \text{const.}$ ist. Die sogenannte **Strahlemittanz** ist nun definiert als

$$\varepsilon_{xx'} = \frac{A_{xx'}}{\pi} = \frac{1}{\pi} \iint dx \cdot dx' \quad \text{in [mm mrad]}, \quad (4.5)$$

dabei ist die normierte Emittanz (unabhängig von der Strahlenergie) $\varepsilon_{n,xx'} = \beta \gamma \cdot \varepsilon_{xx'}$ (4.6)

Aus der Summe der Einzellösungen einfacher linearer Bewegungsgleichungen für die einzelnen Teilchen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen, lässt sich relativ einfach ein Zusammenhang für das Teilchenkollektiv entwickeln. Wir gehen dabei von der Hillschen DGL aus und erinnern uns, daß es cosinus- und sinusartige Lösungen gibt. Daher versuchen wir den allgemeinsten Ansatz einer Schwingung:

$$x'' + k(s) \cdot x = 0 \quad \text{und} \quad x(s) = A \cdot u(s) \cos(\Psi(s) + \Psi_0)$$

$$x'(s) = A \cdot u' \cos(\Psi + \Psi_0) - A \cdot u \cdot \sin(\Psi + \Psi_0) \Psi'$$

$$x''(s) = A \cdot u'' \cos(\Psi + \Psi_0) - A \cdot u' \cdot \sin(\Psi + \Psi_0) \Psi' - A \cdot u' \cdot \sin(\Psi + \Psi_0) \Psi' - A \cdot u \cdot \cos(\Psi + \Psi_0) \Psi'^2 - A \cdot u \cdot \sin(\Psi + \Psi_0) \Psi''$$

Einsetzen in die Hillsche DGL ergibt:

$$\left[u'' - u \cdot \Psi'^2 + k \cdot u \right] \cos(\Psi + \Psi_0) - \left[u \cdot \Psi'' + 2u' \cdot \Psi' \right] \sin(\Psi + \Psi_0) = 0$$

Wenn dies für alle Teilchen gelten soll, müssen die Klammern identisch Nulls sein. Aus der zweiten Klammer ergibt sich als Verbindung zwischen Phasenvorschub $\Psi(z)$ und Amplitude $u(z)$:

$$u \cdot \Psi'' = -2u' \cdot \Psi' \quad \Rightarrow \quad \Psi = \int \frac{dz}{u^2} \quad \quad u'' - u \cdot \Psi'^2 + k \cdot u = u'' - \frac{1}{u^3} + k \cdot u = 0 \quad (4.7)$$

Im Allgemeinen führt man die **Amplituden- oder β -Funktion** ein, mit $\beta(s) = u^2(s)$. Außerdem ersetzt man die Amplitude durch $A = \sqrt{\varepsilon}$. Damit sind die für die lineare Strahloptik relevanten Funktionen:

$$\begin{aligned} x(s) &= \sqrt{\varepsilon \beta(s)} \cdot \cos(\Psi(s) + \Psi_0) \\ x'(s) &= \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{\beta'(s)}{2\sqrt{\beta(s)}} \cos(\Psi(s) + \Psi_0) - \sqrt{\varepsilon \beta(s)} \cdot \sin(\Psi(s) + \Psi_0) \frac{1}{\beta(s)} = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} \cdot \left[\frac{\beta'(s)}{2} \cos(\Psi(s) + \Psi_0) - \sin(\Psi(s) + \Psi_0) \right] = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} \cdot [\alpha(s) \cos(\Psi + \Psi_0) + \sin(\Psi + \Psi_0)] \end{aligned}$$

(4.8) mit $\Psi(s) = \int \frac{ds}{\beta(s)}$ und $\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2}$

Für die Anfangsbedingungen

$$x_0 = \sqrt{\varepsilon\beta_0} \cdot \cos(\Psi_0)$$

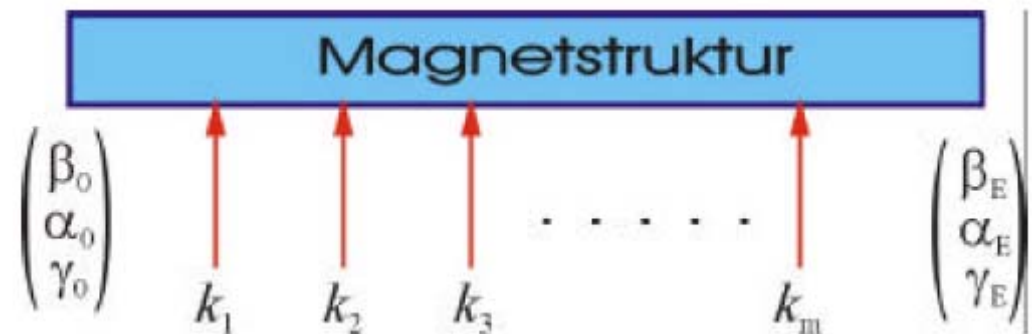
$$x'_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_0}} \cdot [\alpha_0 \cos(\Psi_0) + \sin(\Psi_0)]$$

folgt

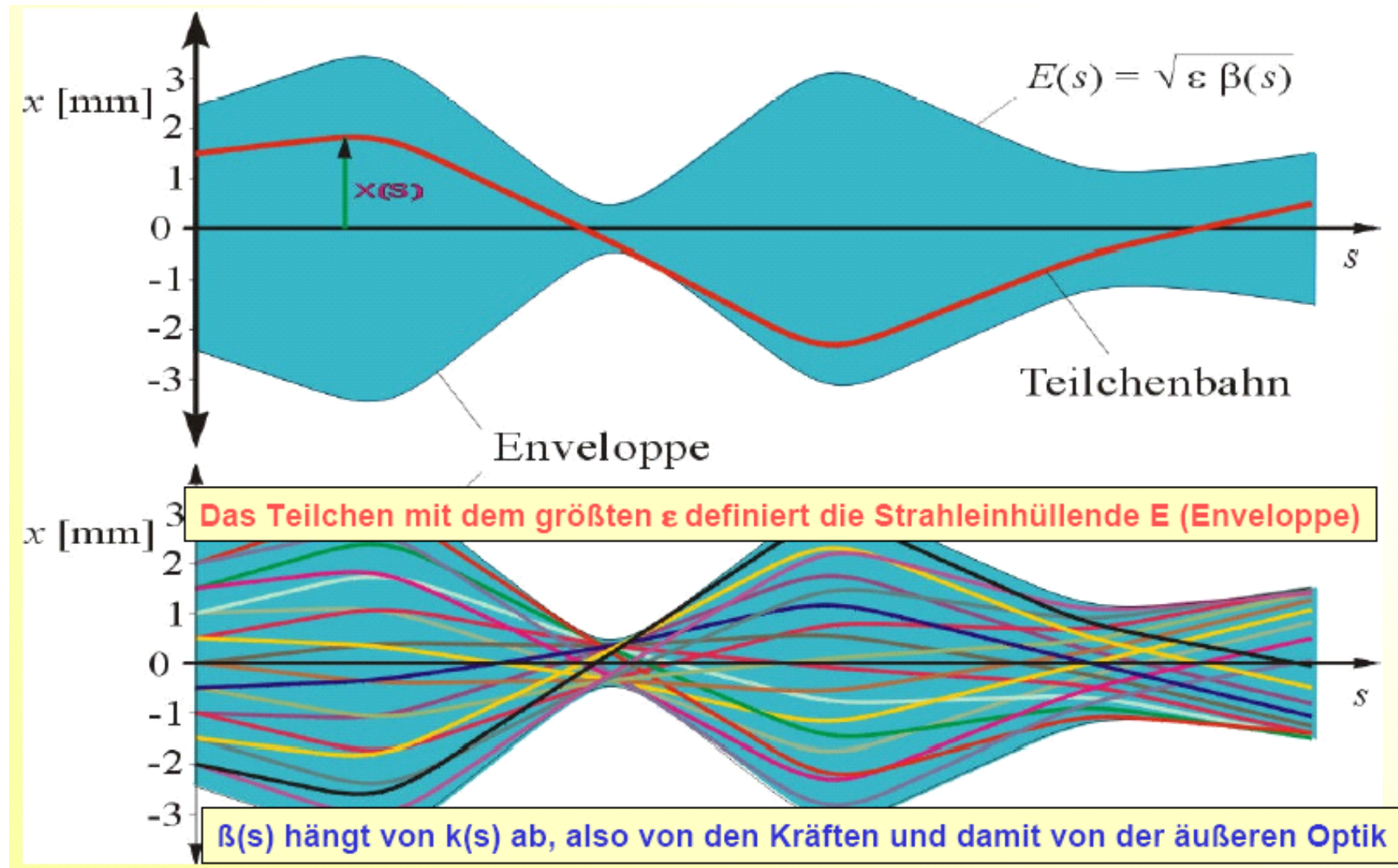
$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \Psi + \alpha_0 \sin \Psi) & \sqrt{\beta \cdot \beta_0} \sin \Psi \\ \frac{(\alpha_0 - \alpha) \cos \Psi - (1 + \alpha_0 \alpha) \sin \Psi}{\sqrt{\beta \cdot \beta_0}} & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} (\cos \Psi - \alpha \sin \Psi) \end{pmatrix} \quad (4.8')$$

Man erkennt an dieser Matrix, dass neben den optischen Funktionswerten am Anfang und am Ort s der Struktur auch noch der Phasenvorschub der Betatronschwingung zwischen diesen beiden Punkten berücksichtigt werden muss.

Die optischen Funktionen am Ende der Strahltransportstruktur hängen bei gegebenen Anfangswerten α_0, β_0 und γ_0 von den k -Werten der Magnete ab.



Dies sind Einzelteilchenlösungen für beliebige Anfangsparameter. Beispiele dafür siehe unten:



Lässt man die Anfangsphase das Intervall $[0, 2\pi]$ durchlaufen, dann beschreiben die Einzelteilchenlösungen in der x, x' -Ebene eine Ellipse.

Mit $\cos^2(\Psi(s) + \Psi_0) + \sin^2(\Psi(s) + \Psi_0) = 1$ lassen sich die Winkelfunktionen eliminieren und man

erhält
$$\frac{x^2}{\beta(s)} + \left(\frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}} x + \sqrt{\beta(s)} \cdot x' \right)^2 = \varepsilon \quad \text{oder}$$

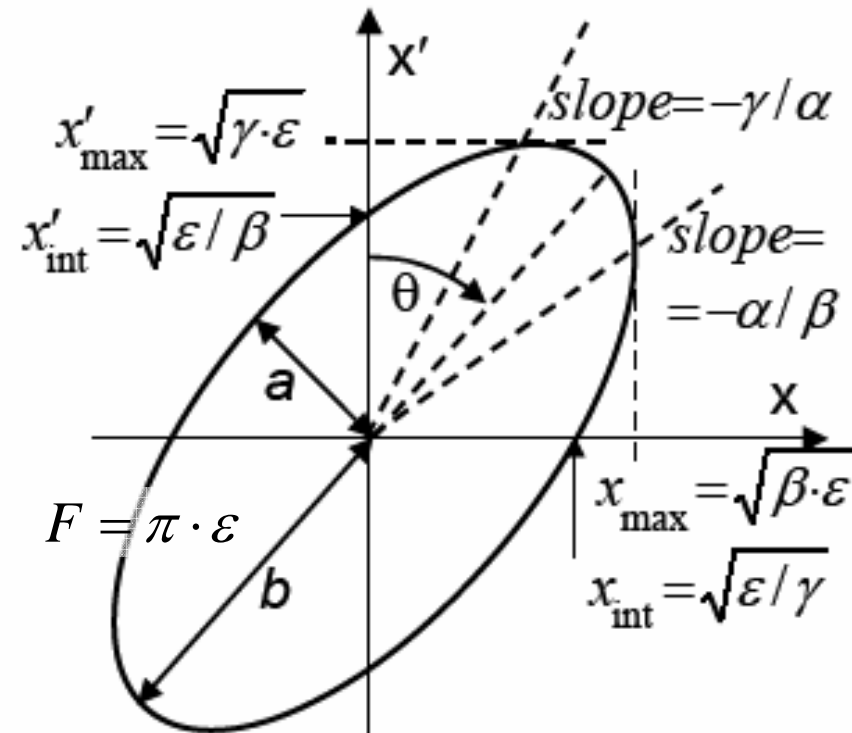
$$\gamma(s)x^2 + 2\alpha(s)xx' + \beta(s)x'^2 = \varepsilon \quad (4.9)$$

mit
$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (4.10)$$

Dies ist eine Ellipsengleichung und beschreibt für einen vorgegebenen Ort s und ein vorgegebenes ε die Lage aller Teilchen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen.

Für periodische Beschleuniger (etwa Ringe oder längere Linearbeschleuniger) wiederholen sich die optischen Funktionen $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ und ein einzelnes Teilchen läuft entlang der Ellipsenberandung. Teilchen mit anderen ε durchlaufen ähnliche Ellipsen. Das Teilchen mit dem größten ε bestimmt die von den Teilchen belegte Phasenraumfläche (Strahlemittanz $\varepsilon = F/\pi$).

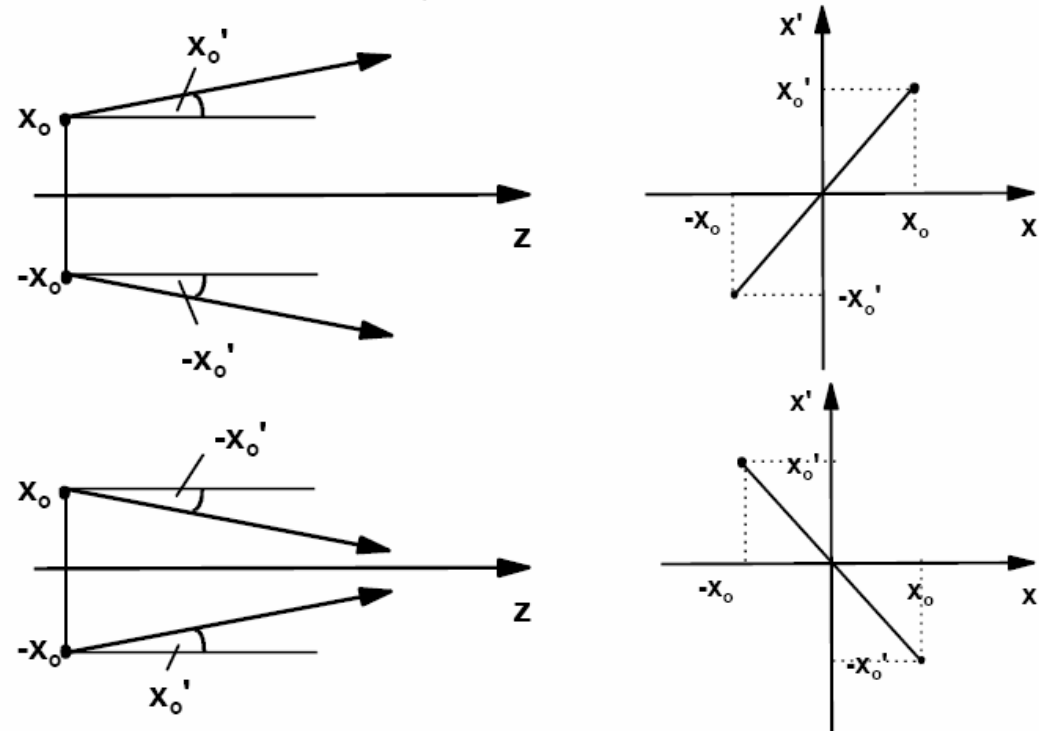
Man nennt nun $\alpha(s)$, $\beta(s)$ und $\gamma(z)$ die "Twiss-Parameter" und die Ellipse "Courant-Snyder-Ellipse".



Die Darstellung der Ellipse zeigt die Bedeutung der Twiss-Parameter und der Lage der Ellipse bezüglich des Koordinatensystems im zweidimensionalen Phasenraum.

Orientierung in Bezug auf den Strahl:

Die Darstellung zeigt, wie die Emittanzellipse für einen divergenten, sowie für einen konvergenten Strahl orientiert ist.



Wie sich die Emittanzellipse bei einer Drift oder einer Linse verändert, zeigt die folgende Abbildung. Bleibt die Emittanz erhalten so muss für zwei verschiedene Stellen s_0 und s entlang der Achse gelten:

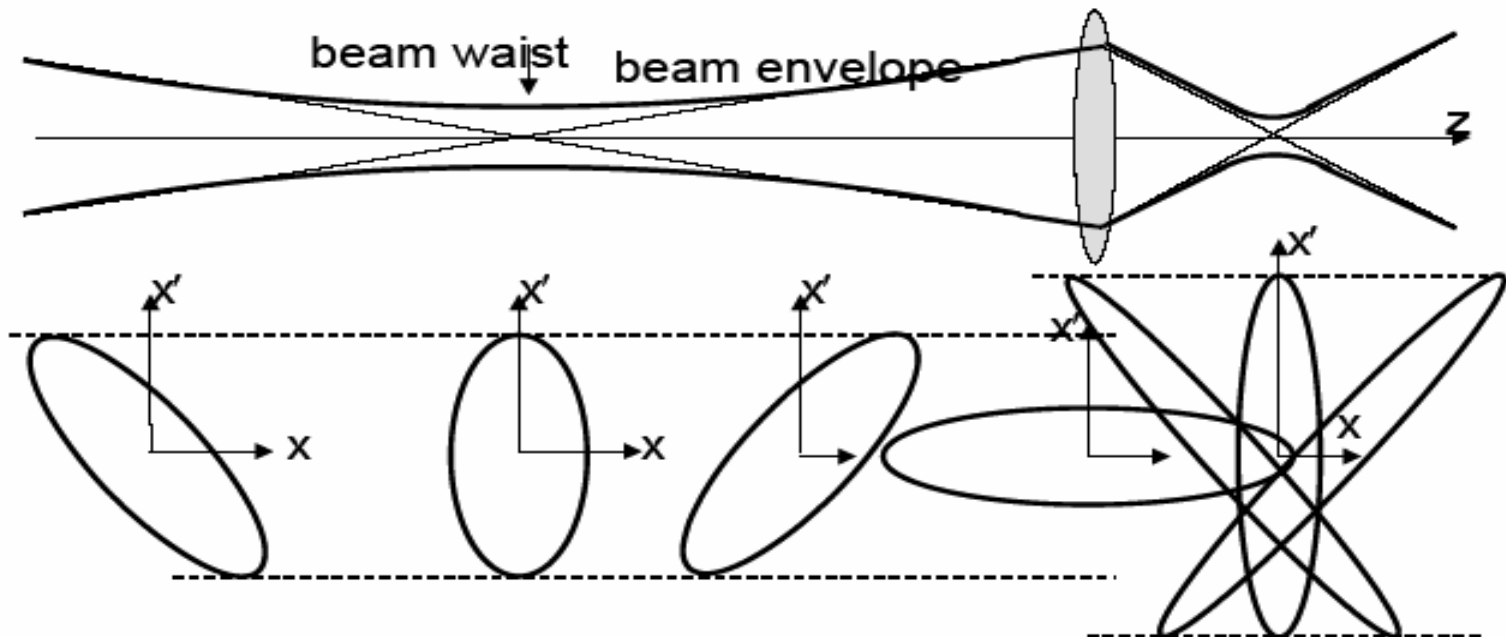
$$\gamma(z)x^2 + 2\alpha(z)xx' + \beta(z)x'^2 = \gamma(z_0)x_0^2 + 2\alpha(z_0)x_0x_0' + \beta(z_0)x_0'^2$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_z = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} c(z) & s(z) \\ c'(z) & s'(z) \end{pmatrix}$$

Aus diesen Gleichungen folgt für die Transformation der Twiss-Parameter (in der Strahlmatrix \underline{v}):

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \beta(s) & -\alpha(s) \\ -\alpha(s) & \gamma(s) \end{pmatrix} = \underline{A} \circ \underline{v}_0 \circ \underline{A}^T \quad (*) \text{ und damit}$$

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & -2sc & s^2 \\ -cc' & cs' + sc' & -ss' \\ c'^2 & -2s'c' & s'^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$



Beispiel Drift: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ c' & s' \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\beta = \beta_0 - 2\alpha_0 z + \gamma_0 z^2$$

$$\alpha = \alpha_0 - \gamma_0 z$$

$$\gamma = \gamma_0$$

Bei einer Drift ändern sich die Winkel nicht, daher ist γ konstant. Man erkennt außerdem $\alpha(z) = -\frac{\beta'(z)}{2}$. Die β -Funktion, welche den Strahlradius bestimmt verläuft parabelförmig. Die Halbachsen der Ellipse zeigen in die Achsenrichtungen, wenn $\alpha = 0$ wird. Dann hat der Strahl eine Taille. Ist $\alpha_0 > 0$, d.h. der Strahl am Anfang konvergent, so wird dieser die Taille oder "waist" an der Stelle $z = \frac{\alpha_0}{\gamma_0}$ haben.

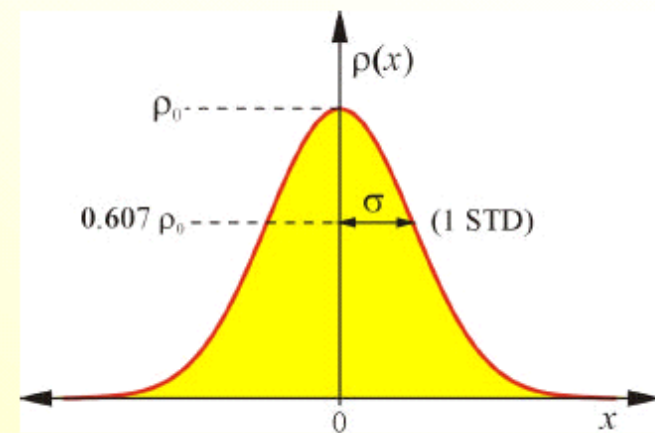
Zusammenhang zwischen Ellipse und Strahlbreite:

Dies ist bei einer Gaußverteilung:

$$\sigma_x = \sqrt{\varepsilon_{RMS} \beta_x(z)}$$

Bei der Gaußverteilung ergibt der Root Mean Square (RMS)-Wert der Emittanz gerade die Breite der Gaußverteilung.

Als **Strahlbreite** wird eine **Standardabweichung** der Dichteverteilung definiert



Die RMS-Emittanz ist definiert als:

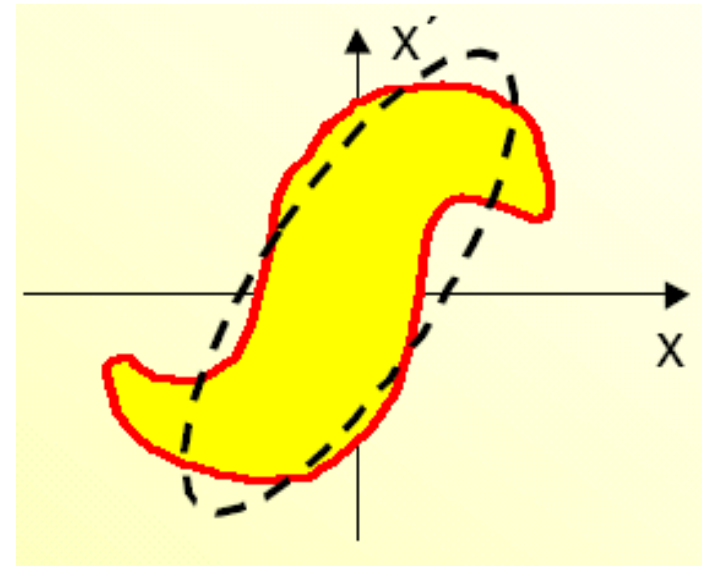
$$\mathcal{E}_{x,x'}_{RMS} = \sqrt{\overline{x'^2} \cdot \overline{x^2} - \overline{xx'}^2} \quad \text{mit} \quad \beta_{rms} = \frac{\overline{x^2}}{\mathcal{E}_{x,x'}_{RMS}} \quad \gamma_{rms} = \frac{\overline{x'^2}}{\mathcal{E}_{x,x'}_{RMS}} \quad \alpha_{rms} = \frac{\overline{xx'}}{\mathcal{E}_{x,x'}_{RMS}} \quad (4.12)$$

Für eine Gaußverteilung ergibt das Vierfache der RMS-Emittanz gerade die 90%-Emittanz (innerhalb dieser Emittanzellipse befinden sich 90% der Strahlteilchen). Schwieriger wird es bei anderen Dichteverteilungen oder nicht ellipsenförmigen oder filamentierten Phasenräumen.

Definition von Ellipsen mit der entsprechenden Fläche, die 100%, 90% der Teilchen umfassen (**Randemittanz**) oder rms-Werte.

Wirken nicht lineare Kräfte auf die die Teilchen, so filamentiert die Verteilung. Die Phasenraumfläche bleibt zwar erhalten --> Emittanzellipse muß jedoch den Strahl umfassen und ist dadurch größer als die eigentliche Phasenraumfläche --> Emittanzwachstum

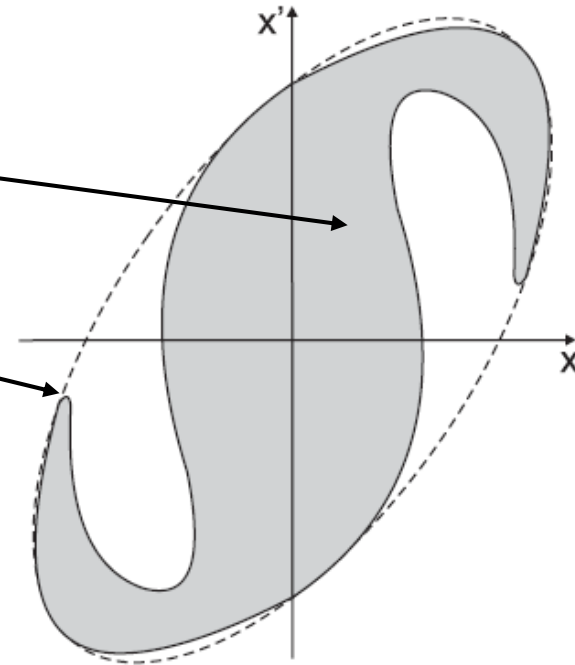
Dissipative Kräfte führen zu einem wirklichen Emittanzwachstum. Dispersion vom Magneten führt zu einer Kopplung der Unterräume und damit zum Emittanzwachstum der 2 dimensional Emittanz.



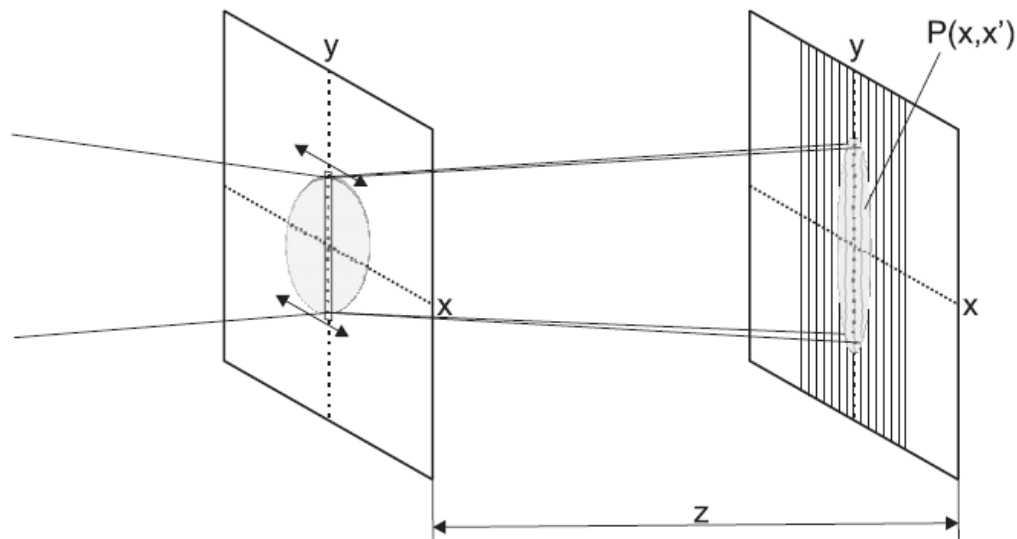
Randemittanz

Effektive Emittanz

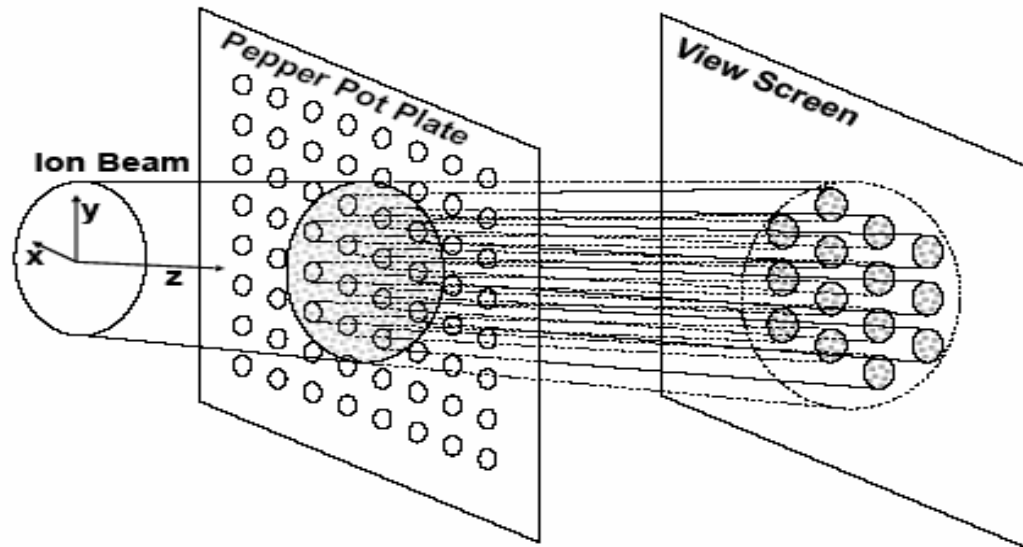
Teilemittanz: Die Ellipse enthält nur eine Fraktion der im Strahl vorhandenen Teilchen. Häufigste Verwendung der Teilfraktionen 80%, 90%, 95%, 99% und 100%



Beispiele für Emittanzmessanlagen:



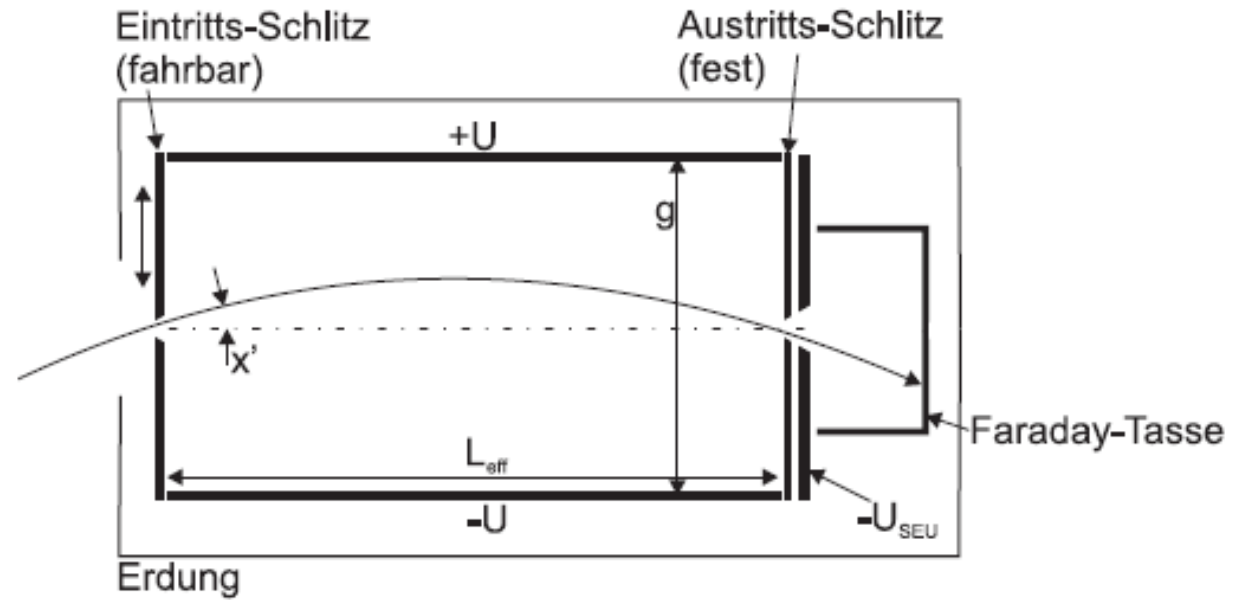
Schlitz-Gitter
Emittanz-
messanlage



Pepper-pot
Emittanzmeßanlage



Allison
Scanner



4.4. Strahltransport in periodischen Systemen

In einem Kreisbeschleuniger unterliegt die Hillsche DGL bestimmten Randbedingungen. Die Koeffizienten $K(s)$ werden also periodisch:

$$r'' + K(s) \cdot r = 0 \quad K(s + C) = K(s) \quad (4.1')$$

Hierbei ist der Ringumfang gleich C . Die Hillsche DGL hat große Ähnlichkeit mit der Gleichung des harmonischen Oszillators, nur dass der Koeffizient $K(s)$ nicht konstant ist (Variation der Oszillatorkonstante).

Die Gleichgewichtsbahn eines Kreisbeschleunigers ist die in sich **geschlossene Bahnkurve** („closed orbit“), die das Sollteilchen bei jedem Umlauf von neuem durchläuft. Diese Lösung ist per definitionem periodisch. Teilchen mit Orts- und Winkelabweichung zur Sollbahn machen Betatronschwingungen um die Gleichgewichtsbahn. Die Betatronschwingungen sind die **nicht periodischen Lösungen** der Hillschen DGL.

Das **Floquet-Theorem** wird in der Mathematik zur Lösung der Hillschen DGL benutzt. Dabei gibt es Lösungen $r = \varphi(s)$, die sich beim Fortschreiten um jeweils eine Periode C bis auf einen konstanten Faktor reproduzieren:

$$\varphi(s + C) = e^{i\psi} \varphi(s)$$

Dabei ist ψ der Phasenvorschub. Die Funktion ist im Allgemeinen komplex. Als reelle Lösung kennen wir ja schon den Ansatz aus (4.8): $x(s) = \sqrt{\varepsilon\beta(s)} \cdot \cos(\Psi(s) + \Psi_0)$

Dabei ist die Betatronfunktion $\beta(s)$ periodisch. Für das Resonanzverhalten ist der Betatronphasevorschub $\Delta\Psi = \Psi(s + C) - \Psi(s)$ über einen vollen Umlauf von entscheidender Bedeutung. Daher definiert man den Arbeitspunkt oder auch **Q-Wert** eines Ringbeschleunigers in der Art

$$Q = \frac{\Delta\Psi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds}{\beta(s)} \quad (4.13)$$

Der Arbeitspunkt gibt anschaulich die Anzahl der Betatronschwingungen an, die ein Teilchen pro Umlauf ausführt. Aufgrund der Periodizitätsbedingung $\beta(s + C) = \beta(s)$ und $\alpha(s + C) = \alpha(s)$ folgt aus (4.8') die Transfermatrix für einen vollen Umlauf zu

$$\begin{aligned} \underline{A}_{s \rightarrow s+C} &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\Psi + \alpha(s) \sin \Delta\Psi & \beta(s) \sin \Delta\Psi \\ -\frac{(1 + \alpha^2(s)) \sin \Delta\Psi}{\beta(s)} & \cos \Delta\Psi - \alpha(s) \sin \Delta\Psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\Psi + \alpha(s) \sin \Delta\Psi & \beta(s) \sin \Delta\Psi \\ -\gamma(s) \sin \Delta\Psi & \cos \Delta\Psi - \alpha(s) \sin \Delta\Psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.8'')$$

Damit kann man die Strahlmatrix über einen vollen Umlauf entsprechend Gleichung (*) transformieren und ermitteln, welche Transportmatrix $\underline{A}_{s \rightarrow s+C}$ die Strahlmatrix in sich selbst wieder überführt.