

2. Bauelemente im Beschleunigerbau Ablenkmagnete, Multipole

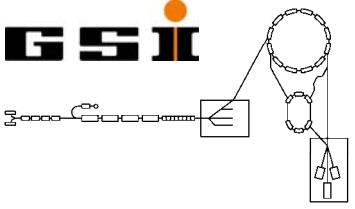


2.1 Inhalt

2.2 Dipolmagnete

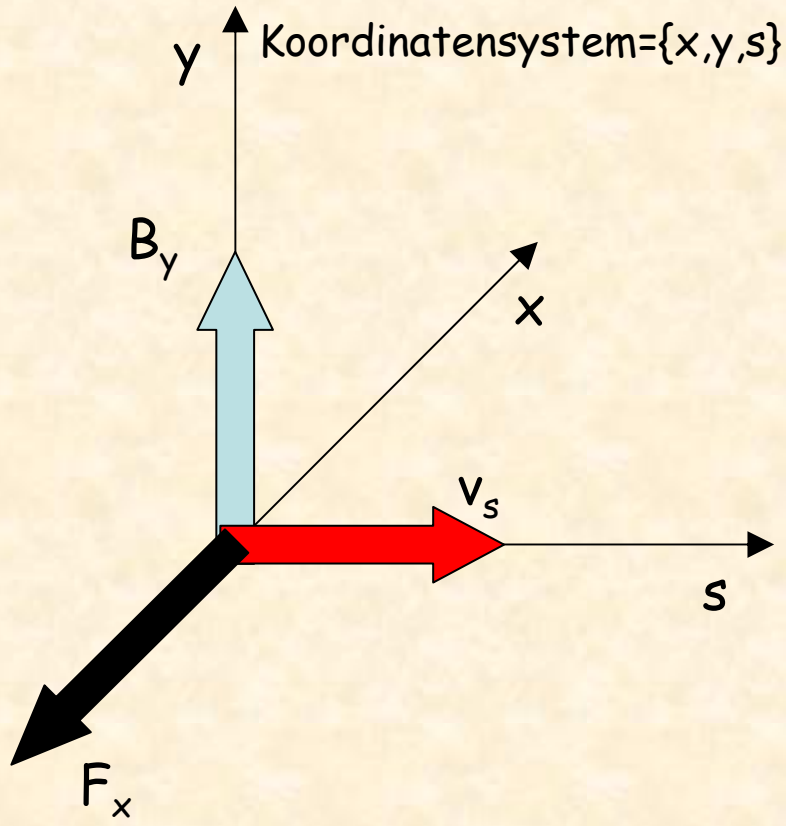
2.3 Fokussierung durch ein Solenoidfeld

2.4 Quadrupolmagnete



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.1 Dipolmagnete



Der Ortsvektor in Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = r \vec{e}_r + s \vec{e}_s$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{s} \vec{e}_s$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \vec{e}_\phi + \ddot{s} \vec{e}_s$$

Die Kraftwirkung des B-Feldes

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = F_x \vec{e}_x = -qv_s B_y \vec{e}_x$$

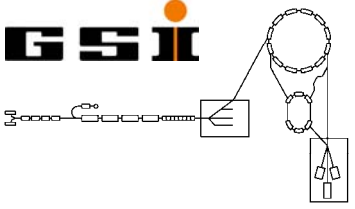
Zentrifugalkraft und Kraft im Magnetfeld

$$-mr\dot{\phi}^2 = -qv_s B_y \quad m \frac{v_s^2}{r} = qv_s B_y$$

Fig. 2.1: Festlegung des Koordinatensystems

Die magnetische Kraft steht senkrecht auf der Geschwindigkeit, weshalb sich die kinetische Energie des Teilchens nicht ändert.

$$\frac{1}{r} = \frac{q}{p} B_y$$

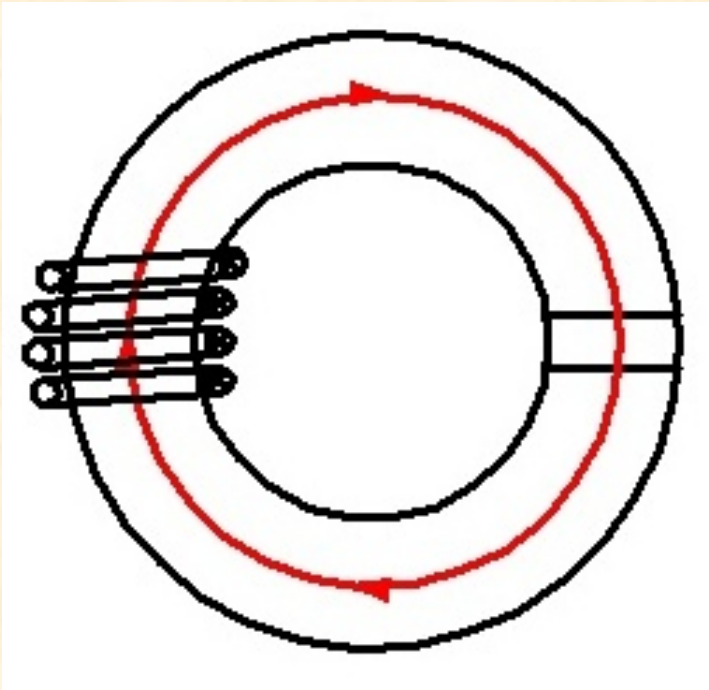


2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.1 Dipolmagnete (Übungsaufgabe Nr.1)



Übungsaufgabe Nr. 1: Die Rolle des Eisens beim Bau von Beschleunigermagnete



- Länge des Integrationsweges im Eisen: l_E
- Länge des Integrationsweges im Luftspalt: h
- Größe der Durchflutung: nI
- Magnetisches Feld im Eisen: H_E
- Magnetisches Feld im Luftspalt: H_0

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

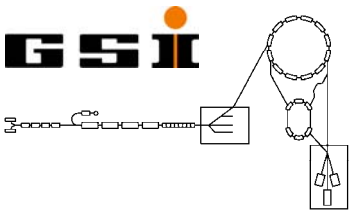
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_E l_E + H_0 h = n \cdot I$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{B_0}{\mu_0 \mu_r} l_E + \frac{B_0}{\mu_0} h = n \cdot I$$

$$B_0^{Eisen} = \mu_0 \frac{n \cdot I}{\left(h + \frac{l_E}{\mu_r} \right)}$$

$$B_0^{Luft} = \mu_0 \frac{n \cdot I}{(h + l_E)}$$

$$\frac{B_0^{Eisen}}{B_0^{Luft}} = \frac{h + l_E}{\left(h + \frac{l_E}{\mu_r} \right)} \approx 1 + \frac{l_E}{h}$$



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.1 Dipolmagnete (Übungsaufgabe Nr.1)

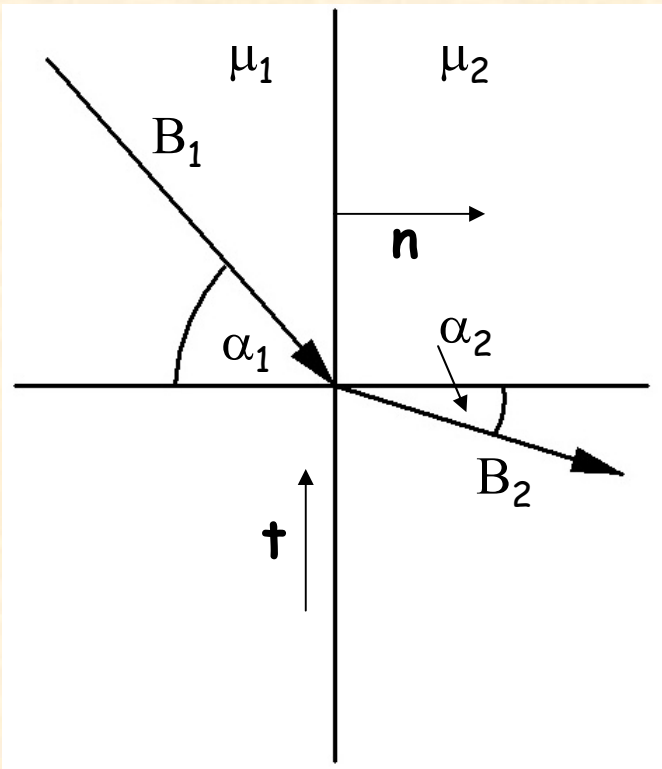


Die Normalkomponente der magnetischen Induktion B ist an den Grenzflächen zweier magnetisch verschiedener Materialien immer stetig:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

Tritt in der Grenzschicht keine Flächenstromdichte auf, so ist die tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke H immer stetig:

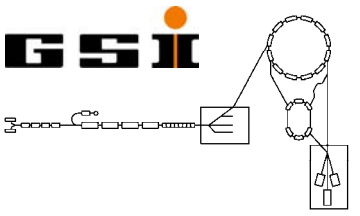
$$\vec{t} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$



$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Beim Übergang von einem Stoff mit sehr großer Permeabilität in einen anderen Stoff mit einer sehr kleinen Permeabilität verlassen die Feldlinien den Stoff mit der großen Permeabilität fast senkrecht zu seiner Oberfläche. In ferromagnetischen Stoffen, die an Luft grenzen, verläuft das Feld fast parallel zur Grenzfläche und steht im Luftbereich fast senkrecht auf der Oberfläche.





2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.1 Dipolmagnete

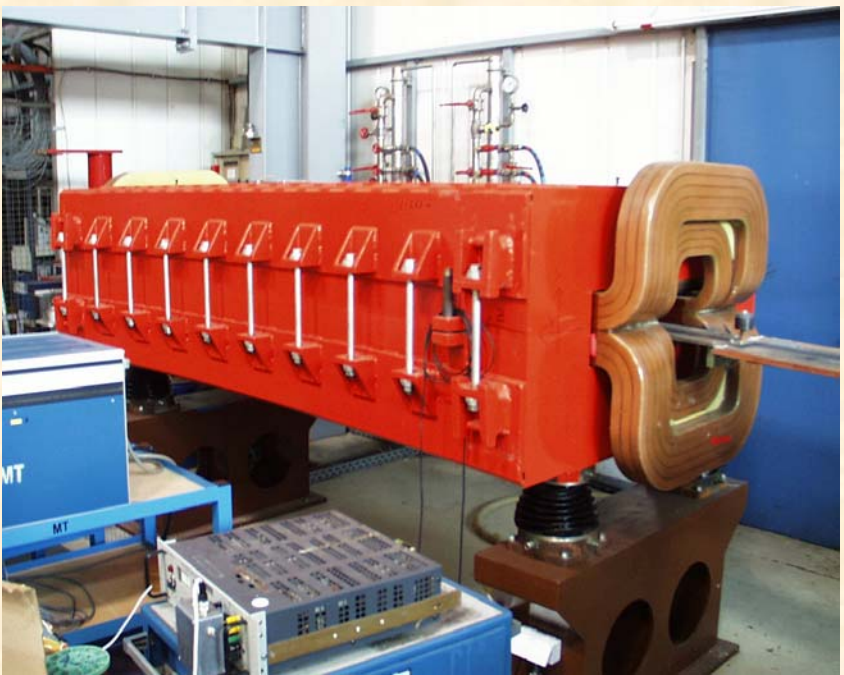


Fig. 2.2: Ein Dipolmagnet im SIS18

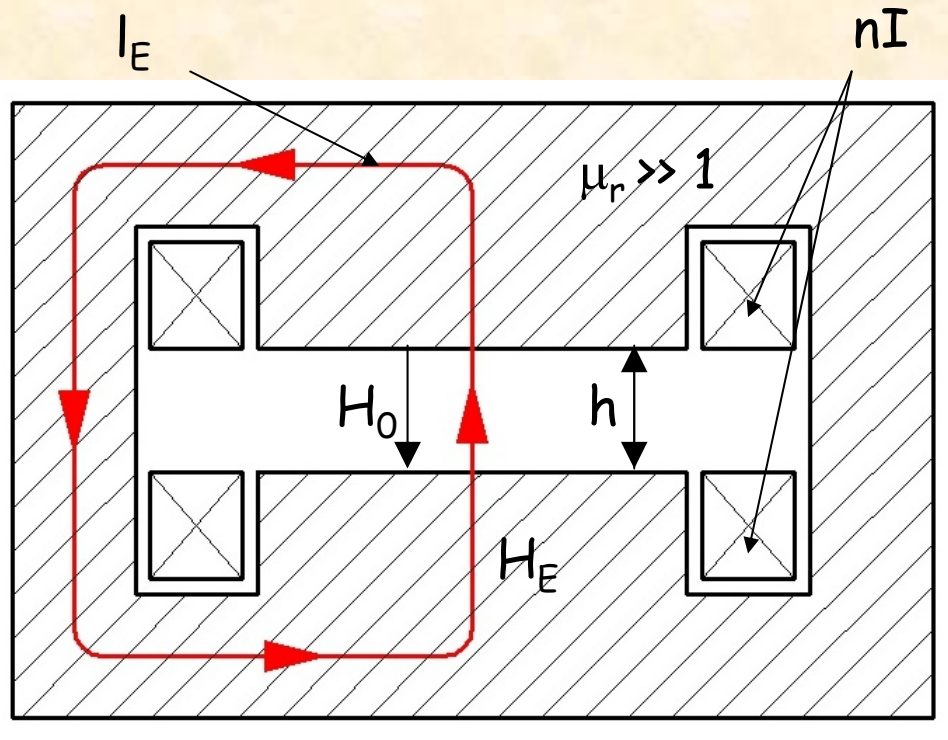
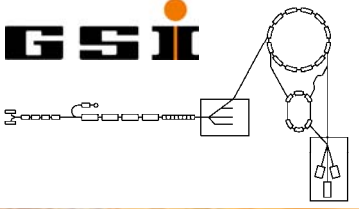


Fig. 2.3: Schematischer Aufbau eines SIS18 Dipolmagnets



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.1 Dipolmagnete



Nun wollen wir den Zusammenhang zwischen der Durchflutung, also dem erregenden Strom nI , und der resultierenden magnetischen Induktion B im Spalt zwischen den Polen ermitteln. Dazu bedienen wir uns des Durchflutungsgesetzes:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

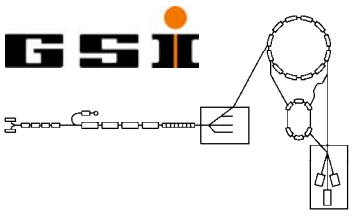
Die Bahngleichungen in y -Richtung kann man dann folgendermaßen hinschreiben:

$$n \cdot I = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_E l_E + H_0 h$$

Die Normalkomponente der magnetischen Induktion ist stetig beim Übergang von Eisen in Luft, das heißt es muss gelten:

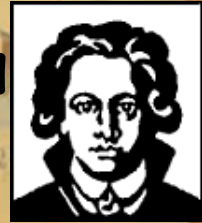
$$n \cdot I = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{B_0}{\mu_0 \mu_r} l_E + \frac{B_0}{\mu_0} h$$

$$B_0 = \mu_0 \frac{n \cdot I}{h} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\mu_r} \frac{l_E}{h}\right)} \Rightarrow \text{mit } \mu_r \gg 1 \quad B_0 \approx \mu_0 \frac{n \cdot I}{h}$$



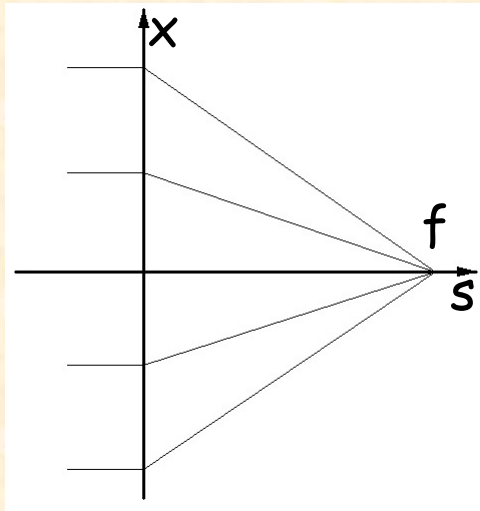
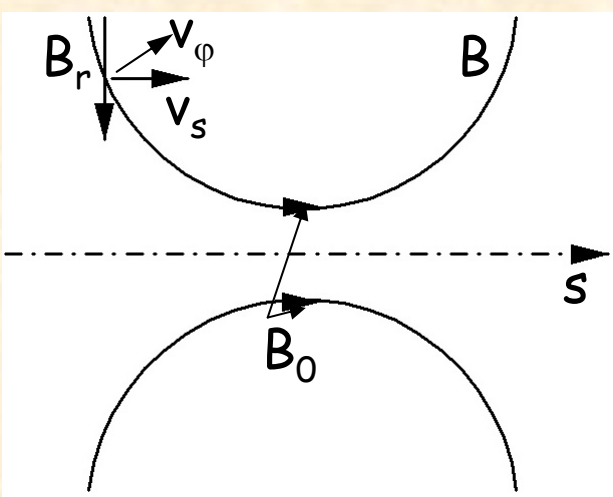
2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.2 Fokussierung durch ein Solenoid



Die Strahlfokussierung durch rotationssymmetrische Magnetfelder beruht auf:

Die geladenen Teilchen „sehen“ zunächst die Radialkomponente eines räumlich ansteigenden axialen B-Feldes und werden azimuthal abgelenkt. Die so entstandene Azimutalbewegung erzeugt dann zusammen mit der Axialkomponente des Feldes eine zur Achse gerichtete Kraft (Die ausführliche Herleitung erfolgt in den Übungen).



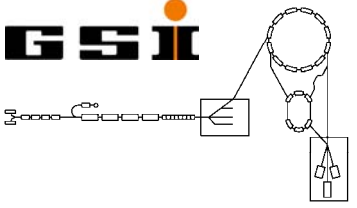
$$r''(s) + \left(\frac{qc_0}{m_0c_0^2} \cdot \frac{1}{\beta\gamma} \cdot \frac{B_0}{2} \right)^2 r(s) = 0$$

Der Ausdruck in den Klammern ist einfach das Reziproke des Bahndurchmessers D , den ein quer in B_0 eingeschossenes Teilchen durchlaufen würde:

$$r''(s) + \frac{r(s)}{D^2} = 0$$

Die Brennweite eines räumlich eng begrenzten Feldes (dünne Linse):

$$\frac{1}{f} = -\frac{r'}{r} \Rightarrow \frac{d}{ds} r' = -\left(\frac{qc_0}{2m_0c_0^2} \frac{B_0}{\beta\gamma} \right) r \Rightarrow \frac{1}{f} = -\left(\frac{qc_0}{2m_0c_0^2} \frac{1}{\beta\gamma} \right)^2 \int_i B_0^2 ds$$



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.2 Fokussierung durch ein Solenoid



Setzt man -als noch bequem realisierbare Werte- für Elektronen folgendes ein:

$$B_0 = 0,1 \text{ Tesla}, \quad l = 5 \text{ cm}, \quad m_0 c_0^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{qc_0}{2m_0c_0^2} \frac{1}{\beta\gamma} \right)^2 \int_l B_0^2 ds = \left(\frac{e \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 0,511 \cdot 10^6 \text{ eV}} \right)^2 \frac{0,01 \frac{\text{V}^2 \text{s}^2}{\text{m}^4} \cdot 0,05 \text{ m}}{(\beta\gamma)^2} \approx \frac{45}{(\beta\gamma)^2}$$

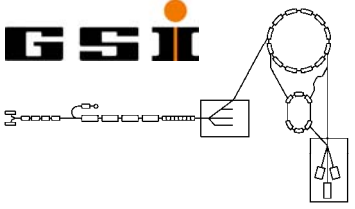
$$f \approx \frac{(\beta\gamma)^2}{45} \Rightarrow E_{kin} > 10 \text{ MeV} \Rightarrow \beta\gamma > 20 \Rightarrow f > 10 \text{ m}$$

Wir ziehen folgendes Fazit:

f nimmt mit p^2 zu. Eine solche magnetische Linse ist also für hochenergetische Elektronen kaum geeignet. Für schwere Teilchen geht es noch schlechter. Bei gleicher Energie wäre D für schwere Teilchen größer. Die geringe Effektivität einer solchen Linse ist im Anbetracht ihrer indirekten Wirkungsweise verständlich.

Der Vorteil einer solchen Linse ist jedoch:

Wegen B_0^2 und q^2 ist ein rotationssymmetrisches B-Feld stets fokussierend, unabhängig von Teilchenladung und Feldrichtung.

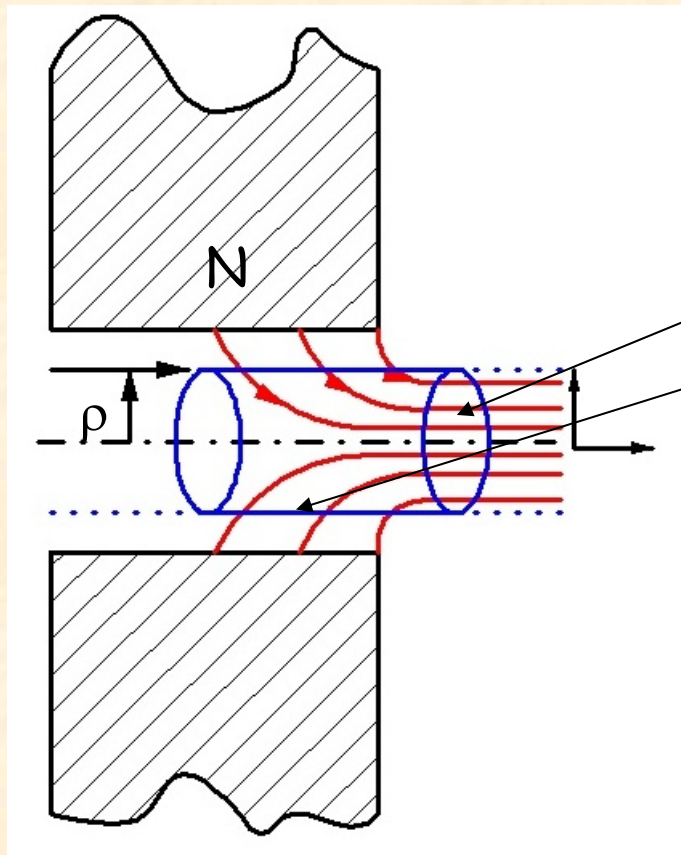


2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.2 Fokussierung durch ein Solenoid



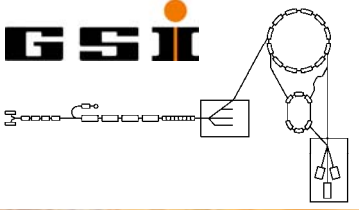
Wir schießen jetzt probeweise ein Teilchen in ein solenoidähnliches Feld ein. Um möglichst definierte Verhältnisse zu bekommen, denken wir uns das Feld zwischen zwei eisernen ebenen Polschuhplatten aufgespannt und das Teilchen werde durch ein kreisrundes Loch in einen Polschuh parallel zum Feld eingeschossen.



$$\psi = \pi \rho^2 B_0 = - \int_{\text{Mantel}} B_r da = -2\pi \rho \int B_r dz$$

$$\frac{\rho B_0}{2} = - \int B_r dz$$

$$\frac{\rho}{2} \frac{dB_0}{dz} = -B_r$$



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.2 Fokussierung durch ein Solenoid



Das Teilchen erfährt bei der Passage durch das radiale B-Feld die Kraft: $F_\varphi = qv_z B_r$

Das Teilchen nimmt dabei einen azimuthalen Impuls auf, der gegeben ist durch:

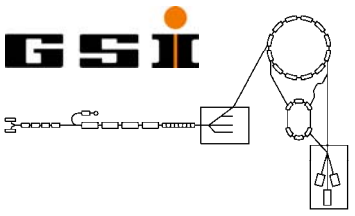
$$mv_\varphi = \int F_\varphi dt = q \int B_r \frac{dz}{dt} dt = -q \frac{\rho B_0}{2}$$

Daraus resultiert die azimuthale Geschwindigkeit v_φ und das führt zu einer Wendelbahn, deren Radius aus dem Gleichgewicht zwischen Zentrifugal- und Lorentzkraft folgt. Der Vergleich zwischen beiden Gleichungen liefert

$$v_\varphi = -\frac{q \rho B_0}{m \cdot 2} \qquad m \frac{v_\varphi^2}{R} = qv_\varphi B_0$$

den Zusammenhang zwischen Eintrittsradius des Teilchens und dem Radius der Wendelbahn:

$$R = \frac{\rho}{2}$$



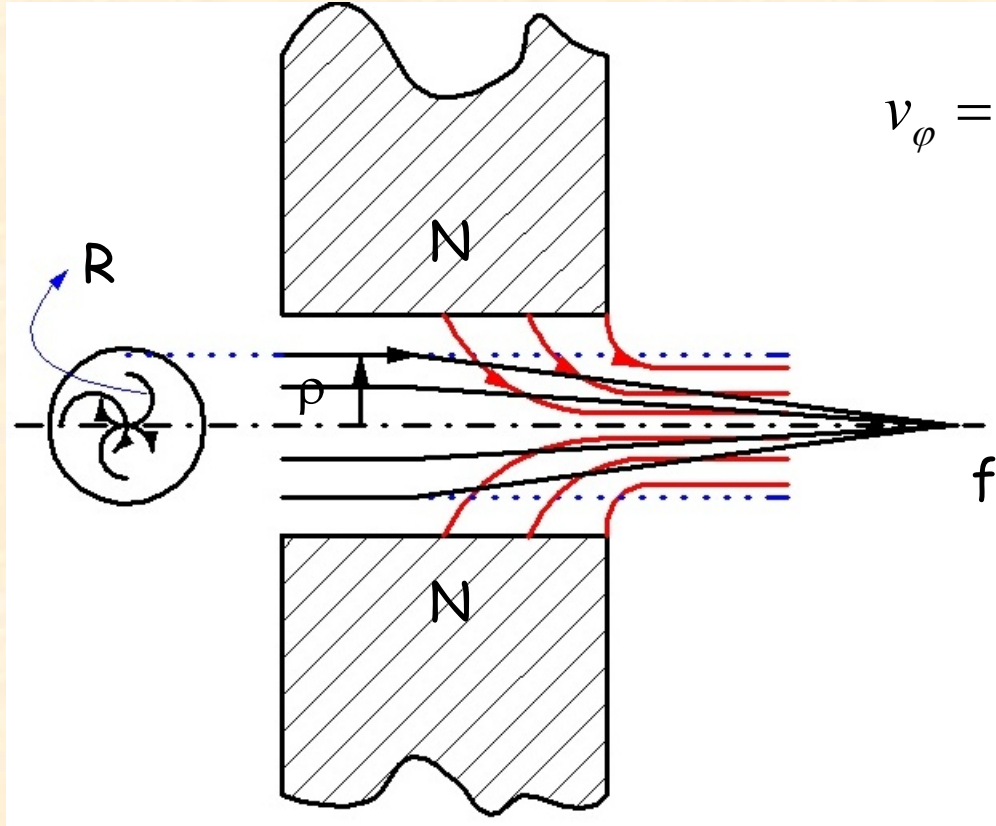
2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.2 Fokussierung durch ein Solenoid



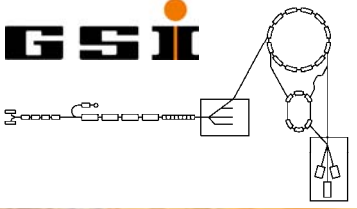
Man sieht: Die Feldgeometrie zeichnet plötzlich die Lochachse als optische Achse aus und das Feld wirkt jetzt als optische Linse.

Die Brennweite der Linse ist offenbar gleich der Strecke längs der Achse, die das Teilchen fliegt, während es eine halbe Wendelwindung ausführt:



$$v_{\phi} = \frac{q}{m} B_0 R \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_{\phi}}{2\pi R} = \frac{q B_0}{2\pi m}$$

$$f = v_z \frac{1}{2v} = \frac{v_z}{2} \frac{2\pi m}{qB_0}$$



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.2 Fokussierung durch ein Solenoid



Mit Hilfe der Lorentzkraft ergibt sich für die Bewegungsgleichung des Teilchens:

$$m \ddot{\vec{r}} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_s \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & \dot{s} \\ B_r & 0 & B_s \end{vmatrix} = qr\dot{\varphi} B_s \vec{e}_r + q(\dot{s}B_r - \dot{r}B_s) \vec{e}_\varphi - qr\dot{\varphi} B_r \vec{e}_s$$

Für die Beschleunigung im Zylinderkoordinatensystem erhalten wir:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{s} \vec{e}_s \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \dots$$

Für die r-Richtung haben wir die Bewegungsgleichung:

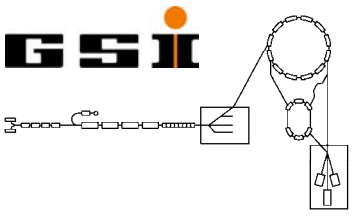
$$m \ddot{r} = m r \dot{\varphi}^2 + qr \dot{\varphi} B_s$$

Für die φ -Richtung haben wir die Bewegungsgleichung:

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = q(\dot{s}B_r - \dot{r}B_s)$$

Für die s-Richtung bleibt noch:

$$m \ddot{s} = -qr \dot{\varphi} B_r$$

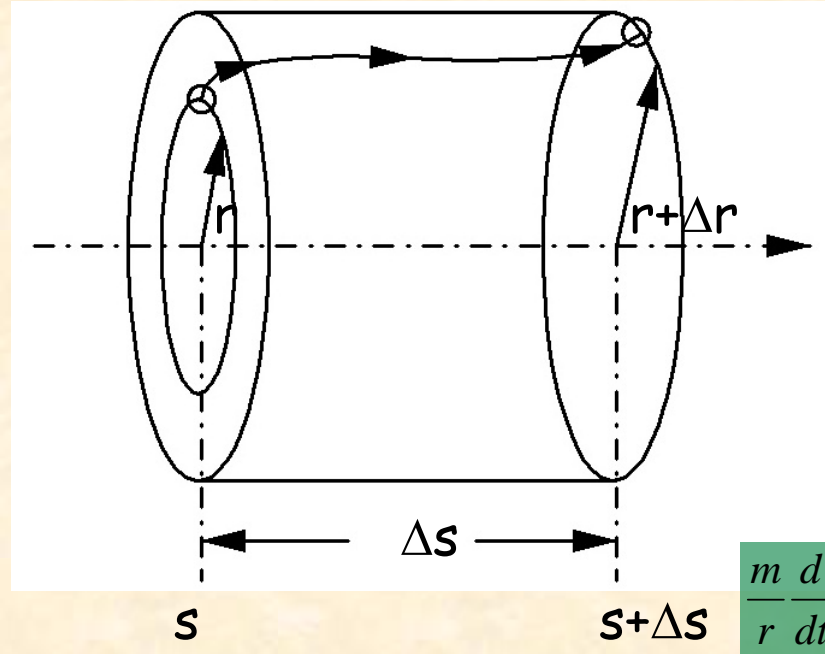


2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.2 Fokussierung durch ein Solenoid



Wir betrachten ein Stück Teilchenbahn, das von $\{r,s\}$ nach $\{r+\Delta r,s+\Delta s\}$ führt und interessieren uns für die Magnetflüsse, die den Kreis mit dem Radius r bei s und dem Kreis mit Radius $r+\Delta r$ bei $s+\Delta s$ durchsetzen. Die Differenz $\Delta\psi$ dieser Flüsse ist offenbar:



$$d\psi = 2\pi r dr B_s - 2\pi r ds B_r$$

Division durch Δt liefert:

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\pi r \left(\frac{dr}{dt} B_s - \frac{ds}{dt} B_r \right)$$

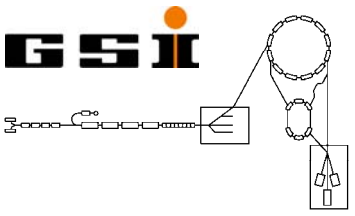
Das kann man in die Bewegungsgleichung in ϕ -Richtung einsetzen:

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = q (\dot{s} B_r - \dot{r} B_s) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(r^2 \dot{\phi} + \frac{q}{m} \frac{\psi}{2\pi} \right) = 0$$

Der Fluß kann nun ersetzt werden durch

$$\psi = \pi r^2 B_s = - \int_{\text{Mantel}} B_r da \quad \text{und man erhält:}$$

$$\dot{\phi} = - \frac{q}{m} \frac{\psi}{2\pi r^2} = - \frac{q}{m} \frac{B_s}{2}$$



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.2 Fokussierung durch ein Solenoid



$$\dot{\phi} = -\frac{q}{m} \frac{\psi}{2\pi r^2} = -\frac{q}{m} \frac{B_s}{2}$$

In die Bewegungsgleichung in r-Richtung setzen wir jetzt das Busch-Theorem ein und erhalten:

$$m\ddot{r} = m r \dot{\phi}^2 + q r \dot{\phi} B_s \Rightarrow \ddot{r} = r \left(\frac{q}{m} \frac{B_s}{2} \right)^2 + \frac{q}{m} r \left(-\frac{q}{m} \frac{B_s}{2} \right) B_s = -\left(\frac{q}{m} \right)^2 \frac{B_s^2}{4} r$$

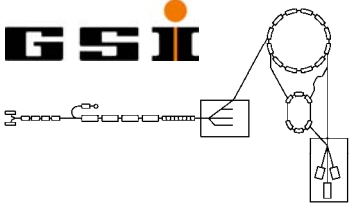
Nun betrachten wir die Bewegungsgleichung in s-Richtung:

$$m\ddot{s} = -q r \dot{\phi} B_r \leftarrow B_r = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_0}{dz}$$

$$\ddot{s} = -\frac{q}{m} r \left(-\frac{q}{m} \frac{B_s}{2} \right) B_r = \left(\frac{q}{m} \right)^2 r \frac{B_s B_r}{2} = -\left(\frac{q}{m} \right)^2 \frac{r^2}{4} B_s \frac{dB_s}{ds} = -\frac{r^2}{8} \left(\frac{q}{m} \right)^2 \frac{d(B_s^2)}{ds}$$

Zur Berechnung der Brennweite reicht jedoch die Bahngleichung in r-Richtung:

$$r'' = -\left(\frac{q}{m} \right)^2 \frac{B_s^2}{4v_s^2} r = -\left(\frac{qc_0}{m_0c_0^2} \frac{1}{\beta\gamma} \frac{B_s}{2} \right)^2 r$$



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.3 Quadrupolmagnete



Eine wesentlich bessere Wirkung als beim Solenoidfeld könnte man erzielen, wenn die Lorentzkraft direkt zur Achse weisen würde. Das setzt ein azimuthales Magnetfeld voraus, das zur Erzielung eines gemeinsamen Brennpunkts linear mit dem Achsabstand ansteigen müsste:

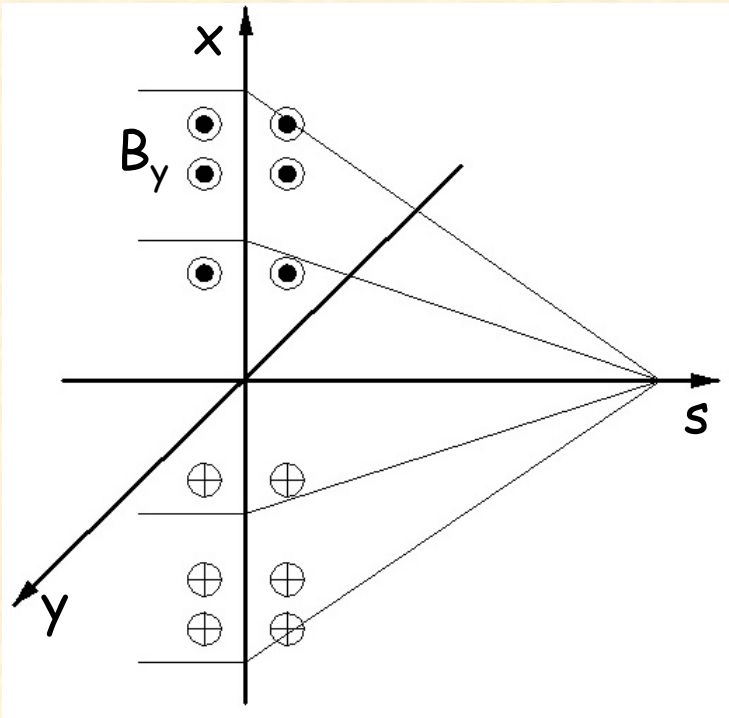


Fig. 2.4: Das magnetische Feld zeigt in y-Richtung; das Teilchen ist positiv geladen

$$B_y = B'x \quad \text{mit} \quad B' = \text{const}$$

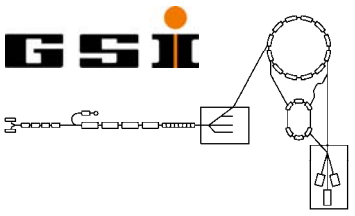
$$\text{Aus} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_s \\ \partial_x & \partial_y & \partial_s \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\partial_s B_y \vec{e}_x + \partial_s B_x \vec{e}_y + (\partial_x B_y - \partial_y B_x) \vec{e}_s = 0$$

folgt sofort auch der Feldverlauf in x-Richtung.

$$B_x = B'y$$

$$B_y = B'x$$



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.3 Quadrupolmagnete

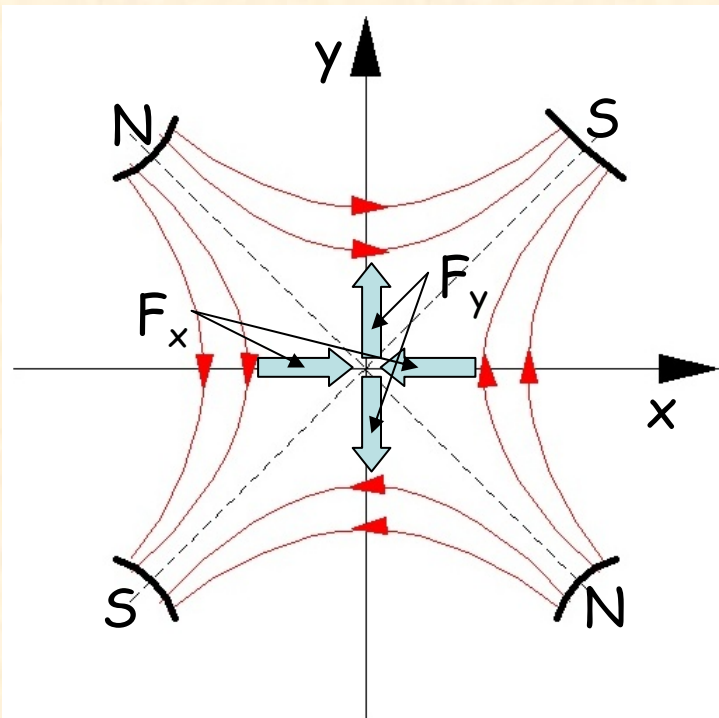
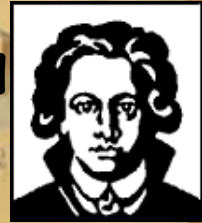


Fig. 2.5: Quadrupolfeld, für positive Teilchen horizontal fokussierend, vertikal defokussierend, gegen die Strahlrichtung gesehen.

Die Gestalt des Feldes insgesamt ergibt sich aus folgender Überlegung:

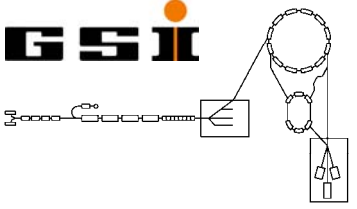
Die Richtung der Feldlinien ist definiert durch

$$y' = \frac{B_y}{B_x} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{B'_x}{B'_y} \Rightarrow \int y dy = \int x dx \Rightarrow$$

$$x^2 - y^2 = c$$

Das sind Hyperbeln mit 45°-Geraden als Asymptoten. Die Konfiguration zeigt Fig. 2.5; es ist das wohlbekannte Quadrupolfeld. Man sieht sofort, daß dieses Feld zwar in x-Richtung fokussiert, wie gefordert, in y-Richtung aber defokussiert. Geeignete Polschuhflächen zur Erzeugung eines solchen Feldes sind dessen Orthogonaltrajektorien:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{B_y}{B_x} = \frac{x}{y} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{B'_x}{B'_y} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln x + \ln y = const \Rightarrow x \cdot y = c$$



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.3 Quadrupolmagnete



Die Bahngleichungen im Quadrupolfeld sind einfach zu berechnen. Man muß nur beachten, daß im magnetischen Feld gilt:

$$\dot{y} = \dot{s}y' = v_s y' \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{s}y' + \dot{s}^2 y'' = \dot{s}^2 y''$$

Die Bahngleichungen in y-Richtung kann man dann folgendermaßen hinschreiben:

$$mv_s^2 y'' = q(\vec{v}_s \times \vec{B})_y = q \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_s \\ 0 & 0 & v_s \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix}_y = qv_s B_x = qv_s B'y$$

Sowohl in y-, als auch in x-Richtung lauten die beiden Bahngleichungen:

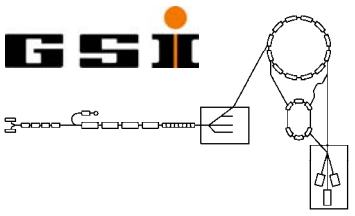
$$x'' + \left(\frac{qc_0}{m_0 c_0^2} \frac{B'}{\beta\gamma} \right) x = 0, \quad y'' - \left(\frac{qc_0}{m_0 c_0^2} \frac{B'}{\beta\gamma} \right) y = 0$$

Hier haben wir den zweiten Term in der Multipolentwicklung des magnetischen Feldes:

$$y'' = \frac{q}{p} B'y$$

Die Brennweite ergibt sich dann in x-Richtung wie bei der Solenoidlinse in gleicher Weise:

$$\frac{1}{f} = -\frac{x'}{x} \Rightarrow \frac{d}{ds} x' = -\left(\frac{qc_0}{m_0 c_0^2} \frac{B'}{\beta\gamma} \right) x \Rightarrow \frac{1}{f} = -\frac{qc_0}{m_0 c_0^2} \frac{1}{\beta\gamma} \int_l B' ds$$



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.3 Quadrupolmagnete

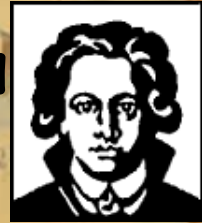


Fig. 2.6: Ein Standard-Quadrupol wie er im SIS18 installiert ist.

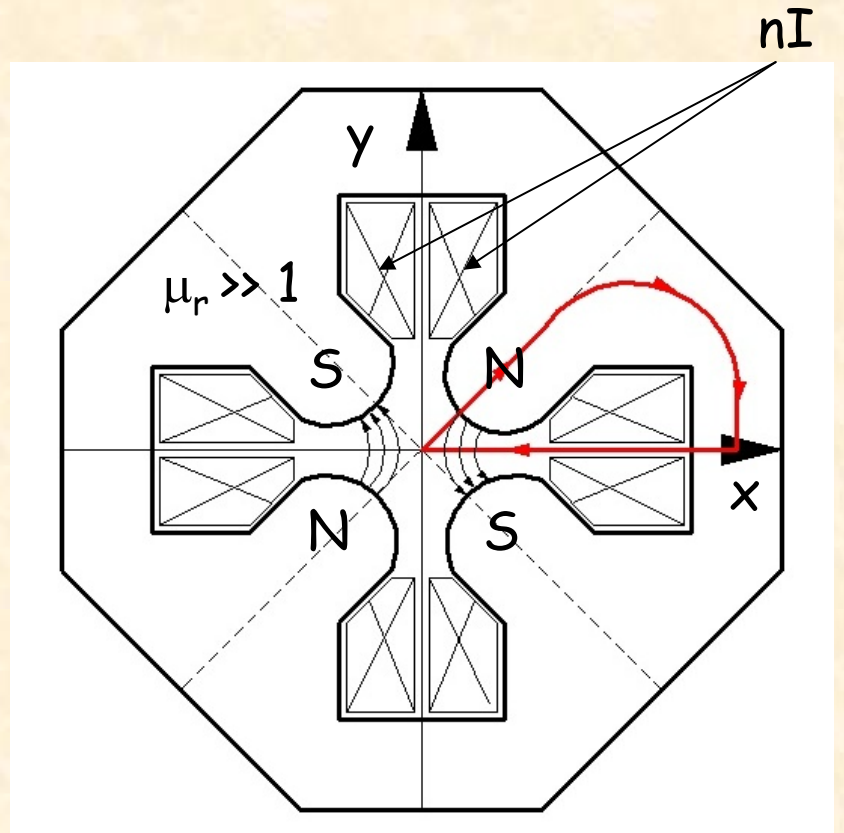
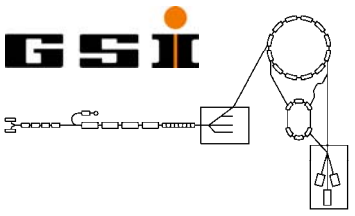


Fig. 2.7: Der Aufbau eines Quadrupols schematisch dargestellt



2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.3 Quadrupolmagnete



Nun bleibt noch die Unbekannte B' zu berechnen. Dazu braucht man wieder das Durchflutungsgesetz:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

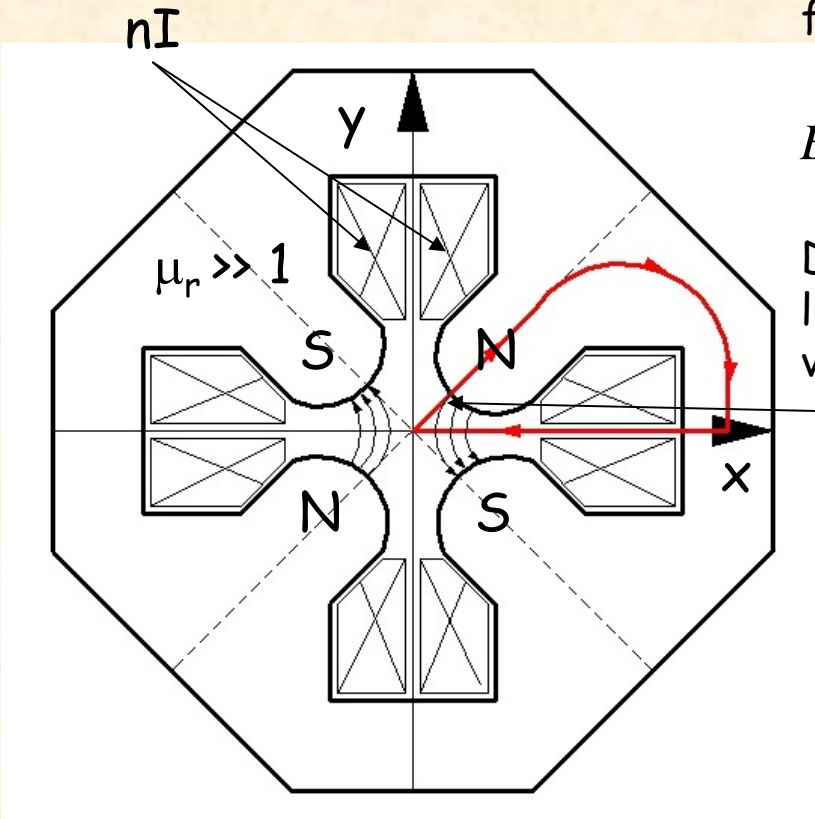
Der Betrag der magnetischen Induktion im Eisenfreien Raum entlang der Asymptote ist:

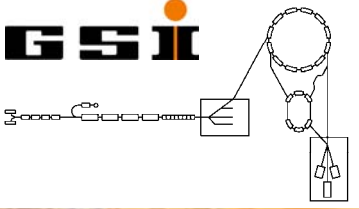
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B' \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow H = \frac{B'}{\mu_0} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Der wesentliche Beitrag zum Umlaufintegral liefert nur das kurze Stück entlang der Asymptote von 0 bis R:

$$H = \frac{B'}{\mu_0} r \Rightarrow \int_0^R \frac{B'}{\mu_0} r dr = \frac{B'}{\mu_0} \frac{R^2}{2} = nI$$

$$\Rightarrow B' = \frac{2\mu_0}{R^2} nI$$





2. Bauelemente im Beschleunigerbau

2.3 Quadrupolmagnete



Wir berechnen die Brechkraft einer dünnen Quadrupollinse für Elektronen, zum Vergleich mit der dünnen Solenoidlinse

Wir legen folgende, leicht zu realisierende Zahlen zugrunde:

$$B' = 2,0 \text{ Tesla/m}, \quad l = 5 \text{ cm}, \quad m_0 c_0^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

Für die Brennweite einer dünnen Quadrupollinse hatten wir berechnet:

$$\frac{1}{f} = \pm \frac{qc_0}{m_0 c_0^2} \frac{1}{\beta\gamma} \int_l B' ds$$

(+ für die fokussierende- und - für die defokussierende Richtung). Einsetzen der obigen Zahlenwerte liefert:

$$\frac{1}{f} \approx \pm \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{0,5 \cdot 10^6 \text{ V}} \frac{0,1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}{\beta\gamma} \approx \pm \frac{60}{\beta\gamma} \Rightarrow f = \pm \frac{\beta\gamma}{60}$$

Das heißt, erst ab 300 MeV Elektronen wird $f > 10 \text{ m}$.

Die Brechkraft ist beim Quadrupolfeld also in der Tat wesentlich stärker als bei der Solenoidlinse und nimmt nur linear mit dem Impuls ab. Andererseits muß man irgendwie mit der Defokussierung in der anderen Ebene fertig werden. Lösung: AG-Fokussierung