

# Ringbeschleuniger und Speicherringe

## 1.) Historische Entwicklung, Grundlagen

### 1.1. Motivation

Die Erforschung der Materie, ihre Grundbausteine und der zwischen ihnen wirkenden Kräfte ist ein elementares Anliegen der Physik. Beim Studium der Materie müssen außerordentlich kleine Dimensionen erforscht werden, die im Bereich  $d < 10^{-15}$  m liegen.

Sichtbares Licht mit Wellenlängen im Bereich von  $\lambda \approx 550 \text{ nm}$  ist nicht in der Lage solche Strukturen aufzulösen. Um die Wellenlänge in den Bereich von  $\lambda \approx d$  zu bringen, benötigt man eine Photonenenergie von

$$E_\gamma = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^{-15} \text{ m}} = 1,99 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 1.2 \text{ GeV}$$

Durch Bremsstrahlung erzeugte Photonen erhält man durch Elektronen mit 1.2 GeV Energie. Diese müssen daher eine Spannung von  $1.2 \cdot 10^9$  V durchlaufen haben.

Desgleichen geht mit hochenergetischen Teilchen. Welle-Teilchen Dualismus →  
De Broglie-Wellenlänge

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h \cdot c}{E} \rightarrow E = \frac{h \cdot c}{\lambda_B} \text{ ergibt das Gleiche}$$

Für Protonen  $Q = 1$ ,  $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$  kg entsprechen 1.2 GeV

$$E_{Kin} = E - E_o = \gamma \cdot m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2 \quad (1.1)$$

$$\rightarrow E_o = m_0 p c^2 = 1,5 \cdot 10^{-10} J = 938 MeV$$

$$\blacktriangleright \gamma = 1 + \frac{E_{kin}}{m_0 c^2} = 1 + \frac{1,2 \cdot 10^9 eV}{9,38 \cdot 10^8 eV} = 2,28$$

Das Elektronenvolt:  $1 eV = e \cdot U = 1,6022 \cdot 10^{-19} J$  (AVs)

$10^3 = 1$  keV,  $10^6 = 1$  MeV,  $10^9 = 1$  GeV,  $10^{12} = 1$  TeV

## 1.2. Relativistische Kinematik:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\gamma^2 - 1 = \frac{1}{1 - \beta^2} - 1 = \frac{1 - 1 + \beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \beta^2 \quad \blacktriangleright \quad \gamma \cdot \beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$p = \gamma \cdot m_o \cdot v = \gamma \cdot \beta \cdot m_o c = m_o c \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

→ Relativistischer Impuls

$$p = \sqrt{(\gamma m_0 c)^2 - m_0^2 c^2} \quad (1.2)$$

$$p^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 \cdot c^2 = (m c^2)^2 - (m_0 c^2)^2 = E^2 - (m_0 c^2)^2$$

→ relativistische Gesamtenergie

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = \gamma m_0 c^2 \quad (1.3)$$

Kinetische Energie  $E_{Kin} = m c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)$

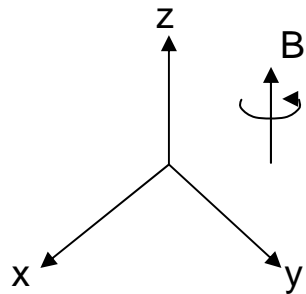
$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\gamma m_0 v \cdot c}{\gamma m_0 c^2} = \frac{p \cdot c}{E}$$

$$E_{Kin} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) m_0 c^2 \quad \rightarrow \quad \text{für } v \ll c \text{ gilt } E_{Kin} \approx \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 - 1 \right) m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

### 1.3. Das Zyklotron

Bei Linearbeschleunigern wachsen mit höherer Energie die Längen der Maschinen und damit die Kosten entsprechend an. Daher lenkt man die Teilchen auf Kreisbahnen, so dass diese eine Beschleunigungsstrecke mehrfach durchlaufen.

Der erste Kreisbeschleuniger, der entwickelt wurde, ist das **Zyklotron** (1930 von E.O. Lawrence an der Universität von Kalifornien vorgeschlagen). Dies wurde 1931 von Livingston experimentell demonstriert und 1932 gab es das erste nutzbare Zyklotron mit einer maximalen Energie von  $E=1.2 \text{ MeV}$

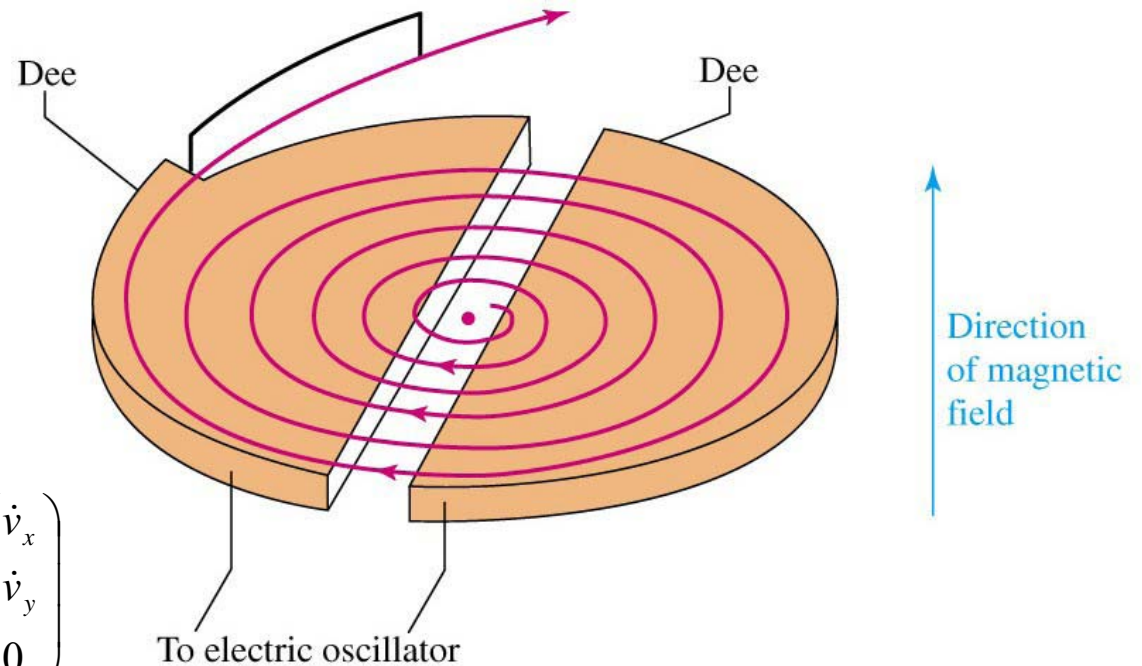


$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$= q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Bewegung im Zyklotron  
läuft in der x, y-Ebene.

$$\dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ 0 \end{pmatrix} = q \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} = q \cdot \begin{pmatrix} v_y B_z \\ -v_x B_z \\ 0 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{array}{l} m \cdot \dot{v}_x = q \cdot B_z \cdot v_y \\ m \cdot \dot{v}_y = -q \cdot B_z \cdot v_x \end{array} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \ddot{v}_x - \frac{q}{m} B_z \cdot \dot{v}_y = 0 \\ \ddot{v}_y + \frac{q}{m} B_z \cdot \dot{v}_x = 0 \end{array} \searrow \begin{array}{l} \ddot{v}_x + \frac{q^2}{m^2 B_z^2} \cdot v_x = 0 \\ \ddot{v}_y + \frac{q^2}{m^2 B_z^2} \cdot v_y = 0 \end{array}$$

Lineare DGL 2. Ordnung  $\rightarrow$  Schwingungsgleichung

Lösungen:  $v_x(t) = v_{ox} \cos(\omega_c t)$  ,  $v_y(t) = v_{oy} \sin(\omega_c t)$



Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{q}{m} \cdot B_z \quad (1.4)$$

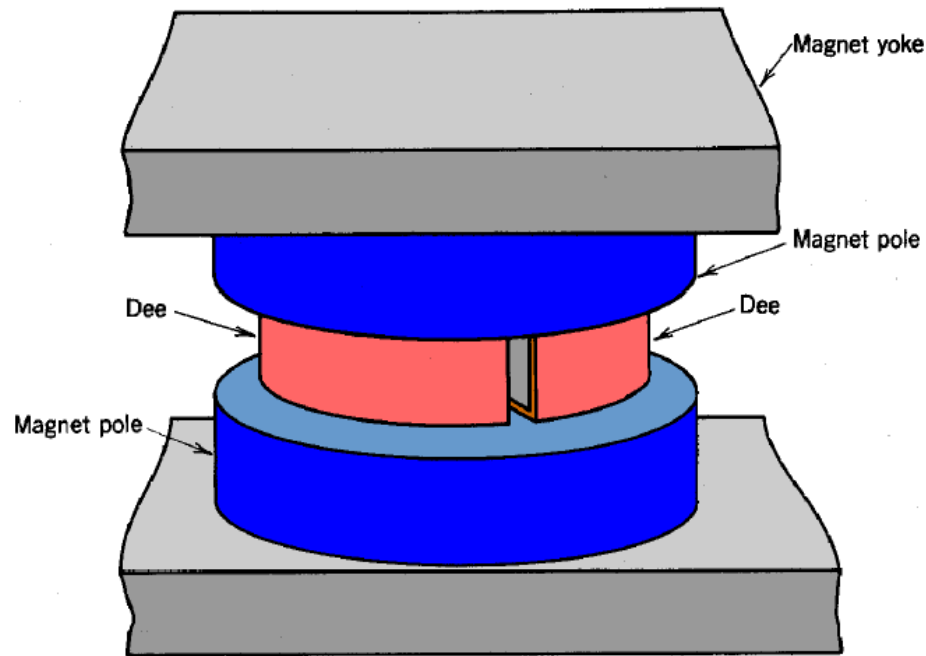
Bsp:  $\alpha$ -Teilchen  $q = 1 \cdot e$ ,  $m = 4m_u$   $m_n = 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Mit  $B_z = 1.5 \text{ T}$  folgt  $\omega_c = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}}{4 \cdot 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \cdot 1,5 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 3,6 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{s}} \Rightarrow f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 5.76 \text{ MHz}$

Die Beschleunigung erfolgt über die D-förmigen Elektroden, die sogenannten „Dees“. Mit klassischen Zyklotrons werden p-, d- und  $\alpha$ -Teilchen auf bis zu 22 MeV beschleunigt (so dass die Bewegung noch hinreichend nicht relativistisch ist  $v \approx 0,15c$ ).

Beispiel: 22 MeV Protonen

$$\gamma = 1 + \frac{E_{Kin}}{m_0 c^2} = 1 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^7 \text{ eV}}{9,38 \cdot 10^8 \text{ eV}} = 1.023 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0,213 \hat{=} 21,3\% c$$



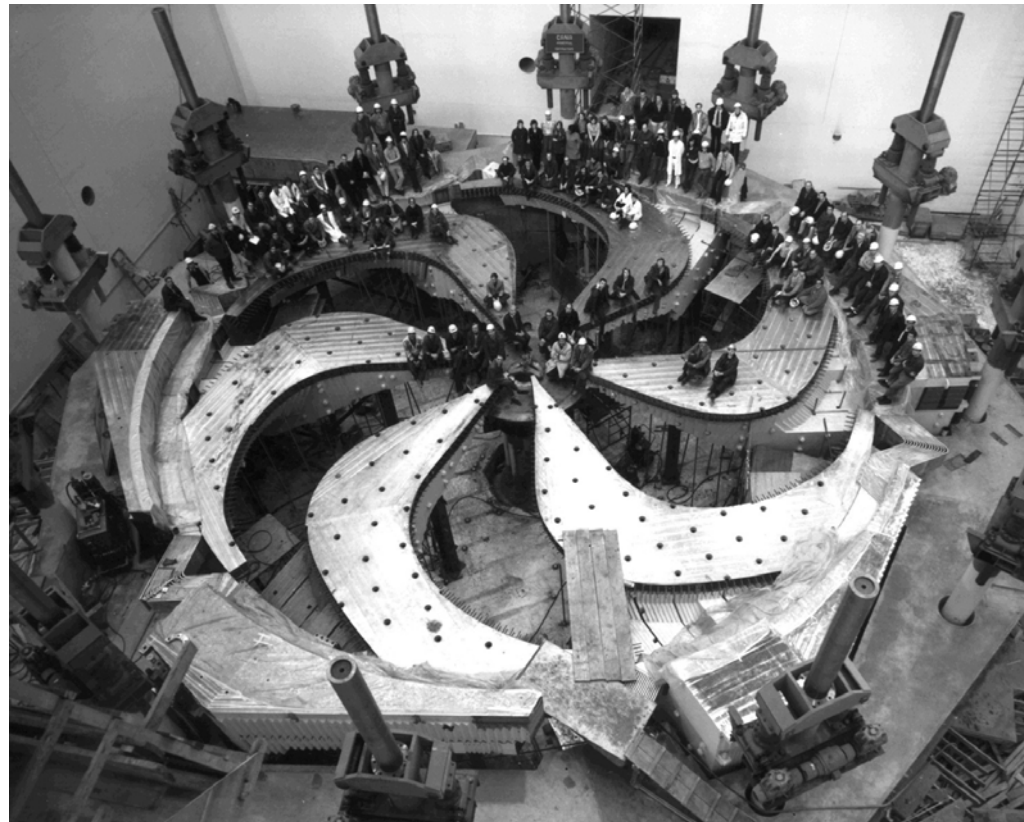
Bei höheren Energien ändert sich die Zyklotronfrequenz mit steigender Teilchenmasse

$$m = \gamma \cdot m_0 = m(E) \quad \Rightarrow \quad \omega_c(E) = \frac{q \cdot B_z}{\gamma m_0}$$

Fährt man dagegen  $\omega_{HF} = \omega_c(E)$  hoch, so hat man ein Synchrozyklotron, welches nur gepulst zu betreiben ist. Ändert man das Magnetfeld so, dass  $\omega_c$  konstant bleibt mit  $\omega_c = \frac{q \cdot B_z(r)}{m_o \cdot \gamma}$  so hat man ein Isozyklotron vorliegen.

Das größte  
Zyklotron  
weltweit:

Am TRIUMF  
in Vancouver  
500 MeV Protonen



Zusammenhang zwischen Impuls und Bahnradius  $\rho$ :

$$\omega_c = \frac{q \cdot B_z}{\gamma m_o} \Rightarrow \gamma m_o \omega_c \cdot \rho = q \cdot B_z \cdot \rho \quad \Rightarrow \quad m \cdot v = p = q \cdot B_z \cdot \rho \quad (*)$$



Der Energiegewinn pro Spaltdurchgang hängt von der Phasenlage des Ions ab:

$$\Delta E_{HF} = q \cdot U_o \cos \varphi \quad \blacktriangleright \quad \Delta E_{HF} = \max \text{ für } \varphi = 0^\circ \text{ Synchronphase}$$

Ein Teilchenpaket mit einer endlichen Phasenbreite  $\Delta\varphi$  in der Umgebung von  $\varphi = 0^\circ$  wird dadurch präpariert, dass nur Teilchen mit dem max. Energiegewinn auf der ersten Umlaufbahn „überleben“. Andere Teilchen mit kleinerem  $\rho \rightarrow$  Innenblende

Der K-Wert des Zyklotrons:

$$p^2 = m_0^2 c^2 (\gamma^2 - 1) = m_o \cdot m_o c^2 (\gamma - 1)(\gamma + 1) = m_0 \cdot E_{kin} (\gamma + 1) \quad \blacktriangleright \quad E_{Kin} = \frac{p^2}{m_0(\gamma + 1)}$$

$$\frac{E_{Kin}}{A} = \frac{p^2}{(\gamma + 1)m_u} \cdot \frac{1}{A^2} = \frac{B^2 \cdot \rho^2 \cdot q^2}{(\gamma + 1)m_u} \cdot \frac{1}{A^2} \quad \text{mit (*)} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_{Kin}}{A} = \frac{(B \cdot \rho)^2 \cdot e^2}{(\gamma + 1)m_u} \left(\frac{Q}{A}\right)^2 = K \left(\frac{Q}{A}\right)^2$$

$$\text{mit } K = \frac{(B \cdot \rho)^2 e^2}{(\gamma + 1)m_u} \quad \rightarrow \quad \text{nicht relativistisch} \quad K = \frac{(B \cdot \rho)^2 e^2}{2m_u} \quad (1.5)$$



Beispiel:  $B = 1.5T$ ,  $\rho = 2m$  und Protonen, nicht relativistisch

$$K = \frac{(1.5T \cdot 2m)^2 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} As)^2}{1,6606 \cdot 10^{-27} kg \cdot 2} = 6,95 \cdot 10^{-11} \frac{V^2 s^2 m^2 A^2 s^2}{m^4 kg} = 6,95 \cdot 10^{-11} \frac{kg^2 \cdot \frac{m^4}{s^4} \cdot s^2}{m^2 kg} = 6,95 \cdot 10^{-11} kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

→  $K = 434 \text{ MeV}$  (Das wäre natürlich relativistisch!)

Extraktion:

Wenn  $V_o$  der Energiegewinn pro Umlauf darstellt, gilt nach  $N$  Umläufen:

$$\frac{Q^2}{A^2} \cdot K_N = E_{Kin} = e \cdot N \cdot V_o = \frac{e^2 \cdot B^2 \cdot \rho^2}{2m_u} \cdot \frac{Q^2}{A^2} \Rightarrow \rho^2 = \frac{2m_u \cdot A^2 \cdot N \cdot V_o}{e \cdot Q^2 \cdot B^2}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{2m_u \cdot N \cdot V_o}{e} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{A}{Q}}$$

Der Radius  $\rho$  geht mit der Wurzel aus der Umlaufzahl  $N$ . Daher wird die Separation der Orbits immer kleiner → schwierig entsprechende Septa zu designen

## 1.4 Das Synchrotron

Die Entwicklung in der Elementarteilchenphysik erfordert immer höhere Strahlenergien, die mit Zyklotronen nicht erreichbar sind. Mit steigendem  $E_{kin}$  gilt

$$m \frac{v^2}{R} = q \cdot v \cdot B \Rightarrow R = \frac{\gamma m_o \cdot \beta c}{q \cdot B} \quad \curvearrowright \quad R = \frac{\gamma m_o c^2 \cdot \beta}{q \cdot c \cdot B} = \frac{E \cdot \beta}{q \cdot c \cdot B} \quad (1.6)$$

Für relativistische Teilchen:  $R = \frac{E}{q \cdot c \cdot B}$

Da man Magnetfelder nicht beliebig stark machen kann, wächst der Radius schnell auf mehrere Meter.

Beispiel: 1 GeV Protonen =  $1,602 \cdot 10^{-10}$  J

Eisenmagnet:  $B \sim 1.5 \text{ T} \rightarrow R = 2.2 \text{ m}$       Supraleitend:  $B \sim 5 \text{ T} \rightarrow R = 0.67 \text{ m}$

Oder  $E = 100 \text{ GeV} \rightarrow R = 222 \text{ m}$  (Eisenmagnet)

Daher setzt man die Ionen auf ortsfeste Bahn mit einem relativ großen aber konstanten Biegeradius. Das Feld wird nur im Bereich der Bahn von relativ schmalen Magneten erzeugt.

R bleibt dann konstant, wenn  $\frac{E}{B} = const.$  Daher muss B „synchron“ mit der Energie E hochgefahren werden. Ein nach diesem Prinzip arbeitender Kreisbeschleuniger wird deshalb „**Synchrotron**“ genannt.

Zur Beschleunigung dienen HF-Resonatoren welche bei folgenden Frequenzen betrieben werden:

$$L = n \cdot \lambda_{HF} = \frac{n \cdot c}{f_{HF}}$$

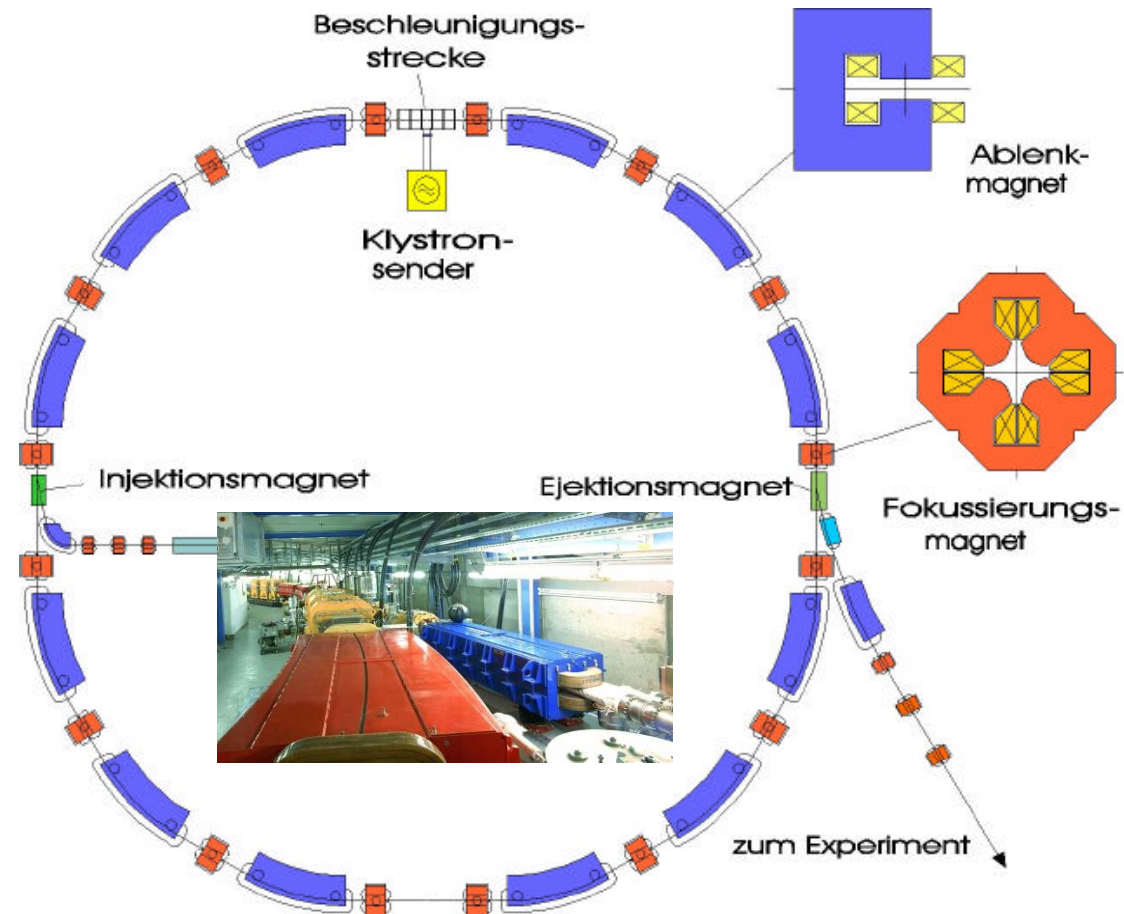
n = ganze Zahl,  
L = Umfang des Rings

Umlauffrequenz

$$f_u = \frac{1}{T_u} = \frac{v}{L} = \frac{\beta \cdot c}{L}$$

$$\rightarrow f_{HF} = h \cdot f_u = \frac{h}{L} \cdot \beta c$$

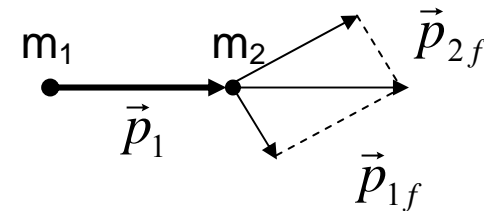
h = harmonische der Umlauffrequenz



## 1.5 Physik der Teilchenkollision

In der Hochenergiephysik werden die Beschleuniger dazu verwendet, Teilchenkollisionen bei möglichst hohen Energien zu ermöglichen. Die einfachsten Experimente sind „fixed target“ Experimente. Schießt man auf ein ruhendes Target, so geht der größte Teil der Energie durch den Rückstoß verloren.

Schauen wir uns dazu die Kinematik zunächst im ruhenden Laborsystem (K) an:



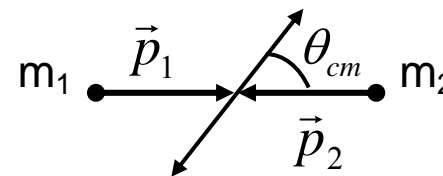
Geschwindigkeit:  $u_1 = u$      $u_2 = 0$

Impuls:  $p_1 = p$      $p_2 = 0$

Energie:  $E_1 = \frac{p \cdot c}{\beta}$      $E_2 = m_{02}c^2$

$$\gamma_1 = \frac{E_1}{m_{01}c^2} \quad \gamma_2 = 1$$

Wechsel in das Schwerpunktsystem K':



Geschwindigkeit:  $u'_1 = v = \frac{p'_1}{m_1} \quad u_2 = -v = \frac{p'_2}{m_2}$

Impuls:  $p'_1 = p' \quad p'_2 = -p' \frac{m_1}{m_2}$

Energie:  $E'_1 = \frac{p' \cdot c}{\beta'} \quad E'_2 = \frac{p'_2 \cdot c}{\beta'}$  oder  $\gamma'_1 = \frac{E'_1}{m_{01}c^2} = \gamma'_2 \quad , \quad \gamma'_2 = \frac{E'_2}{m_{02}c^2}$

Das Schwerpunktsystem bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $u$  gegen das Laborsystem. Die im Stoß umgesetzte Energie im K ist:

$$E^* = E'_1 + E'_2 = \frac{p'c}{\beta'} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = \gamma'_1 m_{01}c^2 + \gamma'_2 m_{02}c^2 = \gamma'(m_{01} + m_{02})c^2$$

Im Fall  $m_{01} = m_{02}$ , ist  $E^* = 2\gamma' m_{01}c^2$  (1.7)

Um die Reaktionsenergie berechnen zu können, müssen wir  $\gamma'$  über die Lorentztransformation ermitteln. Die Teilchen bewegen sich in die x-Richtung. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems gegen das Laborsystem ist  $v = \beta_M c$ .

$$v = \beta_M c = \frac{p_M c^2}{E_M} \quad \text{wobei} \quad p_M = p_1 + p_2 = p = m_1 u = m_1 \beta c \quad \text{und} \quad E_M = E_1 + E_2 = \frac{pc}{\beta} + m_{02}c^2$$

$$\rightarrow v = \beta_M c = \frac{m_1 u c^2}{\frac{pc}{\beta} + m_{02} c^2} = \frac{m_1 u}{\frac{p}{\beta c} + m_{02}} = \frac{m_1 \beta c}{m_1 + m_{02}}$$

Der Zusammenhang von  $\gamma$  und  $\gamma'$  lässt sich dann wie folgt ermitteln:

$$\beta_M = \beta' = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma'^2}} = \frac{m_{01} \gamma \beta}{m_{01} \gamma + m_{02}} = \frac{\gamma \beta}{\gamma + \frac{m_{02}}{m_{01}}} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma + \frac{m_{02}}{m_{01}}}$$



$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2 - 1}{\left(\gamma + \frac{m_{02}}{m_{01}}\right)^2}}} = \frac{\left(\gamma + \frac{m_{02}}{m_{01}}\right)}{\sqrt{2\gamma \frac{m_{02}}{m_{01}} + \left(\frac{m_{02}}{m_{01}}\right)^2 + 1}} \quad (1.8)$$

$$\text{Wenn } m_{o1} = m_{o2} \Rightarrow \gamma' = \frac{\gamma + 1}{\sqrt{2\gamma + 2}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \quad \text{oder} \quad \gamma' \approx \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \quad \text{wenn } \gamma \gg 1 \quad (1.8')$$

Im nichtrelativistischen Fall ist  $\gamma=1$  und damit auch  $\gamma'=1$ .

Das Verhältnis von nutzbarer Energie  $E^* = 2\gamma' m_{01} c^2$  zur Energie des Teilchen 1 im Laborsystem ist

$$\eta = \frac{E^*}{E_1} = \frac{2\gamma' m_{01} c^2}{\gamma m_{01} c^2} = \frac{2\gamma'}{\gamma} \quad \text{und damit erhält man} \quad \eta = \frac{2\gamma'}{\gamma} \approx \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \quad \text{wenn} \quad \gamma \gg 1$$

Der Wirkungsgrad der Reaktion wird also sehr klein mit großem  $\gamma$ . Denn die erforderliche Energie, um Teilchen zu erzeugen ist in diesem Fall

$$\frac{E^{*2}}{E_1^2} = \frac{2}{\gamma} = \frac{2m_{01}c^2}{E_1} \Rightarrow E_1 = \frac{E^{*2}}{2m_{01}c^2} \quad (1.9)$$

Beispiel: B-Mesonen mit Hilfe von Elektronenstrahlen:

$$m_{0e}c^2 = 511 \text{ keV}, E^*(B\text{-Mesonen}) = 9,47 \text{ GeV} \Rightarrow E_1 = \frac{(9,47 \cdot 10^9)^2 \text{ eV}^2}{2 \cdot 5,11 \cdot 10^5 \text{ eV}} = 8,78 \cdot 10^{13} \text{ eV} = 87750 \text{ GeV}$$

→ Daher besser: Kollidierende Strahlen mit gleicher Energie ( $K = K'$ ):

$$\Rightarrow E^* = E_1 + E_2 = 2E$$



Die gesamte Energie beider Strahlen steht zur Verfügung.



→ Prinzip des „Colliders“ und der Speicherung der Teilchen im Speicherring.

Bei Stoßprozessen sind die Reaktionsraten pro Sekunde

$$\dot{N}_p = \frac{dN_p}{dt} = \delta_p \cdot L \quad \delta_p = \text{Wirkungsquerschnitt}$$

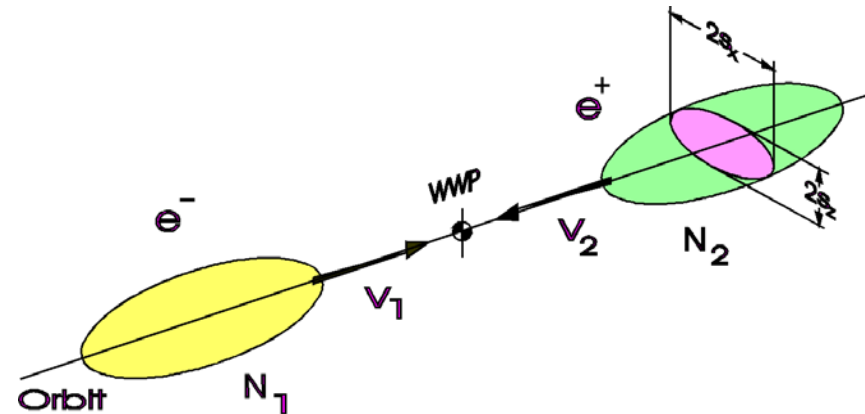
Die Luminosität ergibt sich zu

$$L = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{f_u \cdot N_1 \cdot N_2}{\delta_x \cdot \delta_y} \quad (1.10)$$

$N_i$  = Teilchenzahl pro Einzelstrahl

$\delta_x, \delta_y$  Strahldimension am Kollisionspunkt

$f_u$  = Bunchfrequenz (Rep-rate)



Für eine zweidimensionale Gaußverteilung der Strahlintensität mit den Standardabweichungen erhält man gerade in Wechselwirkungsfläche  $A_{\text{int}} = 4\pi\delta_x \cdot \delta_y$

Dies kann auch über die Emittanz ausgedrückt werden mit  $\delta_x = \sqrt{\varepsilon_{xx'}\beta_x}$

$$L = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{f_u \cdot N_1 \cdot N_2}{\sqrt{\beta_x E_{xx'}} \cdot \sqrt{\beta_y E_{yy'}}$$

Oder mit den Strahlströmen pro Sekunde:

$$N_1 = N_2 = \frac{I}{ef_u} \quad L = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I^2}{f_u \delta_x \delta_y \cdot e^2}$$

Die geringe Zahl an Reaktionen wird beim Speicherring durch die hohe Frequenz der Kollisionen beim Umlauf der Teilchen ausgeglichen.

Die erste Idee zu einem Collider wurde schon 1943 von Kollath, Toucek und Wiederö geäußert. Jedoch erst 1955 gab es ein detailliertes Konzept von Kerst und dann O'Neill. Voraussetzung → sehr gutes Vakuum

Ionenspeicherringe:

LEAR am CERN, TSR in Heidelberg, ESR an der GSI, CELSIUS in Uppsala (Schweden), COSY in Jülich (FZJ), LHC am CERN